

1 - Estadística descriptiva

Enunciat 1.1

Es disposa de les dades de l'alçada en centímetres de 50 persones, agafats a l'atzar:

165	187	166	176	171	184	169	163	172	179
188	162	180	175	177	176	181	189	170	172
175	168	171	166	173	172	163	184	183	168
174	167	179	165	168	176	192	171	173	182
177	176	160	165	169	183	177	169	176	181

- Agrupis les dades en intervals d'igual longitud —tancats per l'esquerra i oberts per la dreta—. Com afecta la distribució dels intervals a la precisió de les dades obtingudes? Calculeu els valors d'interès descriptiu.
- Representis gràficament.

Enunciat 1.2

Una bàscula registra les següents mesures (en Kg):

52	54	58	51	52	55
54	56	52	51	56	55
57	53	53	53	57	52
54	55	52	52	54	53
55	55	52	53	56	56

Calculeu la mitjana aritmètica $\bar{x}$, la desviació estàndard S_N , la mediana M_e i els quartils.

Enunciat 1.3

Es pretén estudiar la diversitat comparativa entre una zona boscosa en recuperació després d'un incendi i altra que no ha estat cremada.

L'estudi recull les dades de l'*Índex de Comparació Seqüencial* (ICS). Un bon indicador de la diversitat específica. A més diversitat major és l'ICS.

S'obtenen les següents dades estadístiques:

	$\overline{ICS}$	σ	asimetria	curtosis
cremat (A)	1.34033307	0.74749	0.0579905	-0.88523
no cremat (B)	1.00684147	0.62651	0.5258195	-0.665103

Extreu la informació pertinent de les dades estadístiques recollides.

Enunciat 1.4

Es llança una moneda 50 vegades i se n'obtenen 22 cares i 28 creus. Quina és la distribució de freqüències i quina la distribució de probabilitat?

Enunciat 1.5

Es disposa d'una mostra $X = \{4, 7, 6, 7, 5, 5, 4\}$. Calculeu la seva mitjana aritmètica, $\bar{X}$.

Enunciat 1.6

Es disposa de la mostra $X = \{4, 7, 6, 7, 5, 8, 9\}$. Calculeu la seva mediana.

Enunciat 1.7

Calculis la mediana dels elements registrats a la taula següent:

Classe	x_i	f_i
[5,7)	6	5
[7,9)	8	11
[9,11)	10	10
[11,13)	12	7
[13,15)	14	10
[15,17)	16	8
[17,19)	18	10
n = 61		

Enunciat 1.8

Amb les dades de l'exercici anterior, calculis la seva moda.

Enunciat 1.9

Es disposa de la mostra ordenada $X = \{4, 5, 6, 7, 7, 8, 9\}$. Calculis la seva moda.

Enunciat 1.10

Un empleat obté uns augments de sou en tres anys consecutius, del 6, 10 i 12 % respectivament, sobre el sou de l'any anterior. Calculis l'augment mitjà del sou.

Enunciat 1.11

En un cultiu bacterià, el nombre de bactèries per unitat de superfície s'incrementa en tres dies de 200 a 5000. Calculis l'increment mitjà diari en %.

Enunciat 1.12

Es disposa de la mostra $X = \{4, 7, 6, 7, 5, 8, 9\}$. Calculis la seva mitjana geomètrica.

Enunciat 1.13

En un determinat comerç es ven un article a diferents preus segons la quantitat: 10 articles a 1 €; 5 articles a 0.75 €; 1 article 0.20 €. Quin és el nombre mitjà d'articles per cada cèntim d'euro?

Enunciat 1.14

Un mòbil es trasllada de A fins a B amb una velocitat mitjana de 20 km/h; per tornar de B fins a A ho fa en canvi a una velocitat mitjana de 50 km/h. Calculis la velocitat mitjana global.

Enunciat 1.15

Es disposa de la mostra $X = \{4, 7, 6, 7, 5, 8, 9\}$. Calculis la seva mitjana harmònica.

Enunciat 1.16

Es disposa de la mostra $X = \{4, 7, 6, 7, 5, 8, 9\}$. Calculis la seva mitjana quadràtica.

Enunciat 1.17

Es disposa de la mostra $X = \{4, 7, 6, 7, 5, 8, 9\}$. Calculis la seva mitjana ponderada.

Enunciat 1.18

Generis un vector de dades amb els nombres naturals del 0 al 100 i calculis els seus quantils.

Enunciat 1.19

Es disposa d'una mostra $M =$ "alçades de la població X " amb els valors següents:

$M = \{ 164, 188, 164, 174, 173, 183, 168, 161, 178, 176, 181, 163, 181, 172, 174, 178, 179, 185, 171, 170, 173, 169, 172, 169, 176, 174, 160, 186, 181, 161, 175, 167, 176, 165, 168, 172, 182, 177, 174, 179, 174, 174, 163, 164, 167, 180, 173, 168, 175, 171 \}$

Calculis:

- Les freqüències i la distribució per quantils.
- El percentil al 43 %.
- El rang de distribució.
- El rang interquartil·lic.
- La variància i la quasivariància i la desviació típica.

Enunciat 1.20

Es vol concedir una beca d'estudis i n'hi ha dos candidats possibles. Un alumne amb 9 punts, que prové d'un centre de mitjana 6 i desviació típica 1. Un altre amb 10 punts, que prové d'un centre de mitjana 7 i desviació típica 2. Trobis quin alumne la mereix més.

Enunciat 1.21

Calculis el coeficient de variació relativa d'una mostra amb: $n = 80$; $S = 2$; $\bar{x} = 10$.

Enunciat 1.22

Es disposa de cinc mostres, $M_x =$ "alçades de la població X ":

$M_1 = \{164, 188, 164, 174, 173, 183, 168, 161, 178, 176\}$

$M_2 = \{181, 163, 181, 172, 174, 178, 179, 185, 171, 170\}$

$M_3 = \{173, 169, 172, 169, 176, 174, 160, 186, 181, 161\}$

$M_4 = \{175, 167, 176, 165, 168, 172, 182, 177, 174, 179\}$

$M_5 = \{174, 174, 163, 164, 167, 180, 173, 168, 175, 171\}$

Trobis en quina de les mostres hi ha més variabilitat.

Enunciat 1.23

Es disposa de la mostra:

$X = \{3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 11, 12, 14\}$

Trobis entre quin interval de valors es troba la massa central de les dades de la mostra.

Enunciat 1.24

Es disposa d'una mostra M = "alçades de la població X " amb:

$M = \{ 164, 188, 164, 174, 173, 183, 168, 161, 178, 176, 181, 163, 181, 172, 174, 178, 179, 185, 171, 170, 173, 169, 172, 169, 176, 174, 160, 186, 181, 161, 175, 167, 176, 165, 168, 172, 182, 177, 174, 179, 174, 174, 163, 164, 167, 180, 173, 168, 175, 171 \}$

Calculis el coeficient d'asimetria de la mostra M .

Enunciat 1.25

R disposa de la base de dades de 272 observacions d'erupcions volcàniques del Guèiser "*Old Faithful*" al parc nacional de Yellowstone. Amb dues variables: duració de l'erupció i temps d'espera fins la propera erupció —ambdues en minuts—. Analitzis la distribució de les dades.

Enunciat 1.26

Es disposa de les notes d'un examen de filosofia de 40 estudiants d'un Institut de Secundària:

0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10

- Trobis la seva distribució per freqüències i calculis la variància i desviació típiques.
- Representis les dades amb un diagrama de barres i en un diagrama de sectors.

Enunciat 1.27

L'estació meteorològica de l'Institut Europa ha recollit les dades de la temperatura màxima corresponents al temporal meteorològic Filomena durant la primera setmana de gener de 2021. —en °C—:

$T_{max} = 9.61, 9.22, 9.67, 10.78, 9.83, 10.39, 7.78, 7.78, 8.28, 8.22, 8.22, 9.28, 11.5, 10.44, 13.83, 13.67, 17.22, 12.39, 14.83, 13.5, 16.78, 15.22, 15.56, 16.28, 15.61, 13.22, 17.33, 19.44, 22.33, 19.5, 17.72$

Representis les dades normalitzades en un histograma.

Enunciat 1.28

En un estudi sobre paràsits en 44 tortugues marines es recullen dades sobre la variable aleatòria $X = \{\text{nombre de paràsits/individu}\}$

$$X = \left\{ \begin{array}{l} 0, 2, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 4, 0, 0, 0, 1, 4, 2, 0, 0, 1, 0, \\ 0, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 5, 1, 3, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \\ 1, 4, 0, 1, 4, 2, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 0, 5 \end{array} \right\}$$

Representis les dades, en freqüències i gràficament.

Enunciat 1.29

Es disposa de les edats de 27 mestres d'una escola de primària.

$E = \{23, 24, 24, 25, 25, 32, 37, 38, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 48, 48, 49, 49, 51, 55, 57, 59, 63\}$

Agrupis les dades per intervals.

Enunciat 1.30

Es volen generar 75 dades normalitzades, situant la seva distribució sobre un diagrama de caixa i assenyalant la mitjana de la distribució amb una línia discontinua.

Enunciat 1.31

Es disposa dels resultats del % de ciment en unes perforacions geològiques.

$C = \{10, 20, 31, 37, 14, 13, 21, 13, 18, 16, 49, 32, 12, 24, 17, 32, 25, 27, 12, 36, 16, 13, 19, 25\}$

Representis C en un diagrama de tija i fulles.

Enunciat 1.32

Es disposa de les següents magnituds d'un terratrèmol en l'escala de Richter.

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 1.0, 8.3, 3.1, 1.1, 5.1, 1.2, 1.0, 4.1, 1.1, 4.0, \\ 2.0, 1.9, 6.3, 1.4, 1.3, 3.3, 2.2, 2.3, 2.1, 2.1, \\ 1.4, 2.7, 2.4, 3.0, 4.1, 5.0, 2.2, 1.2, 7.7, 1.5 \end{array} \right\}$$

Representis R en un diagrama de tija i fulles.

Enunciat 1.33

Es disposa dels resultats acadèmics recollits en la taula següent.

Matemàtiques	CTMA	Biologia	Física	Química
7	8	8	4	8

Mostris els resultats en un diagrama de coordenades polars.

Enunciat 1.34

Generis una simulació de dades normalitzades i representades en un gràfic de coordenades polars

[Adaptació de l'exemple, Ross Ihaka, Department of Statistics, University of Auckland. Private Bag 92019, Auckland New Zealand.]

Enunciat 1.35

Es disposa de les dades de la temperatura mitjana màxima i mínima (en °C), de la precipitació total acumulada (en mm), de la velocitat mitjana del vent (en km/h), dels índex HDD i CDD [34] dels anys 2011 al 2020, per tal de comparar-les entre sí [Dades recollides per l'estació meteorològica de l'[Institut Europa](#) de L'Hospitalet de Llobregat.]

TMAX = {21.7, 21.3, 21.2, 21.6, 21.4, 21.2, 21.4, 21.4, 21.3, 21.6}

TMIN = {14.7, 14.1, 13.9, 14.7, 14.6, 14.6, 14.5, 14.8, 14.3, 14.7}

HDD = {1043, 1204, 1243, 1006, 1088, 1051, 1141, 1132, 1114, 1006}

CDD = {848, 864, 798, 792, 850, 797, 889, 918, 842, 848}

PREC = {875.3, 415.5, 432.1, 519.2, 329.4, 450.6, 435.1, 986, 503.2, 943.4}

VENT = {41.8, 41.8, 48.3, 51.5, 49.9, 40.2, 46.7, 48.3, 53.1, 59.5}

[Observació: Heating Degree Day (HDD) i Cooling Degree Day (CDD) són índexs quantitatius que indiquen la demanda d'energia per escalfar o refredar edificis. La base per determinar si un dia específic és un dia de grau de calefacció (HDD) o un dia de grau de refrigeració (CDD) és la

temperatura mitjana diària: $\overline{T} = [(T_{max} + T_{min})/2]$. Cada dia amb una temperatura mitjana inferior a 18 °C es compta com un dia de calefacció. El dia del grau de refrigeració és la contrapart estival del dia del grau de calefacció.

Enunciat 1.36

Es disposa dels valors de la pluviometria (en mm) registrada a l'estació meteorològica de l'[Institut Europa](#) de l'Hospitalet de Llobregat, entre els anys 2008 i 2020.

any = 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020

mm = 707.8, 614.2, 747.5, 875.4, 415.7, 432.0, 519.1, 329.4, 450.5, 435.4, 86.1, 503.2, 899.1

Es desitja saber quina és la tendència de la pluviometria local.

Enunciat 1.37

Es volen comparar les mesures del pètal, comparant les espècies *Iris setosa*, *Iris versicolor* i *Iris virginica* del dataset "iris" de R, amb un gràfic de dispersió.

Enunciat 1.38

Es disposa de les dades de la direcció predominant del vent, durant 4555 dies, registrada a l'estació meteorològica de l'[Institut Europa](#) de l'Hospitalet de Llobregat, entre els anys 2008 i 2020.

Es desitja saber, utilitzant un diagrama de Pareto, quines són les direccions locals predominants del vent.

2 - Transformació de dades

Enunciat 2.1

Es disposa del següent vector de dades:

$$R = \left\{ \begin{array}{l} 2.75, 9.50, 3.62, 5.75, 5.12, 4.87, 9.25, 4.00, \\ 6.37, 6.62, 25.12, 2.87, 6.87, 40.87, 11.37, 2.12, \\ 4.00, 7.25, 20.37, 19.87, 7.37, 8.37, 4.25, 50.00 \end{array} \right\}$$

- Resumeixis les dades i representis amb un histograma. Sense transformar i amb una transformació logarítmica.
- Representis les dades amb un diagrama de caixa. Identifiqueu les dades atípiques —els outliers—.
- Comentis els resultats.

Enunciat 2.2

Consideris el següent vector de dades:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 2.2, 7.6, 2.9, 20.1, 4.6, 4.1, 3.9, 16.3, \\ 3.2, 5.1, 5.3, 7.4, 2.3, 5.5, 9.1, 32.7, \\ 1.7, 3.2, 5.8, 15.9, 5.9, 6.7, 3.4, 40 \end{array} \right\}$$

Observeu el resultat de l'histograma de x i de $\ln x$.

Enunciat 2.3

Posis un exemple de transformació d'una variable qualitativa en quantitativa

3 - Combinatòria. Regla de Laplace.

Enunciat 3.1

En una rifa de 100 bitllets hi ha 1 de premiat. Una persona hi compra 10 bitllets. Es vol saber la probabilitat que té de guanyar el premi.

Enunciat 3.2

Una baralla francesa de 52 cartes es reparteixen a l'atzar entre quatre persones — A , B , C i D —. Sabent que cadascú rep tretze cartes, trobis la probabilitat de que:

- a. B rebi els quatre reis.
- b. B no rebi cap rei.
- c. Entre B i D rebin totes els diamants.
- d. Entre B i D rebin tots els asos i els reis.

Enunciat 3.3

D'una baralla francesa de 52 cartes, se n'extreuen dues a la vegada. Trobis la probabilitat de que:

- a. Les dues siguin trèvol.
- b. Almenys una sigui un trèvol.
- c. Una sigui trèvol i l'altre pica.

Enunciat 3.4

En un poble de 200 habitants hi ha un terratrèmol i moren 70 persones. Una persona d'un altre poble veu la notícia per la televisió.

Quina és la probabilitat de que 3 dels morts en el terratrèmol siguin familiars seus?

4 - Espais de probabilitat i Àlgebres finites.

Enunciat 4.1

Sigui Ω = “el conjunt de casos possibles que resulten de la tirada d’un dau”. Quines de les següents classes de conjunts són σ -àlgebres:

1. $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
2. $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, X^c, \Omega\}$, amb $X \subseteq \Omega$
3. $\mathcal{A}_3 = 2^\Omega$, el conjunt potència.
4. $\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \Omega\}$

Enunciat 4.2

Siguin

- Ω = “el conjunt de casos possibles que resulten de la tirada d’un dau”.
- S = “el conjunt de casos senars possibles que resulten de la tirada d’un dau”.
- P = “el conjunt de casos parells possibles que resulten de la tirada d’un dau”.

Es considera l’àlgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, S, P, \Omega\}$, amb

- $P(S) = P(P) = 0.5$
- $P(S) + P(P) = 1$

Expliquis perquè, en aquest cas, un esdeveniment elemental no és un esdeveniment de probabilitat.

Enunciat 4.3

D’una baralla francesa de 52 cartes, se n’extreu una d’elles. Calculis la probabilitat de que:

1. Sigui figura o piques.
2. Sigui figura però no de diamants.

Enunciat 4.4

En un determinat país, els canals de televisió vistos amb més preferència són els canals: A, B i C. El 35% de la població prefereix el A, el 25% el B i el 20% el C. El 13% mira el A i el B; el 12% el A i el C; i el 8% el B i el C. Finalment, el 5% els mira tots tres.

Calculis:

1. El percentatge de persones que miren, almenys, un dels canals.
2. El percentatge de persones que només mira el canal A.
3. El percentatge de persones que miren el B i el C, però no el A.
4. El percentatge de persones que miren el A o bé no miren ni el B ni el C.

Enunciat 4.5

Es disposa d'un dau en el que la probabilitat de cada cara és proporcional al nombre de punts inscrits en ella. Trobis la probabilitat d'obtenir, amb aquest dau, un nombre senar.

Enunciat 4.6

Expliquis, en termes d'espai de probabilitat, la fórmula clàssica de Laplace:

$$\text{probabilitat} = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Enunciat 4.7

Vint persones s'ordenen aleatòriament, amb totes les ordenacions igualment probables. Trobis la probabilitat de que dues persones concretes siguin una al costat de l'altra.

- a. Repartits en una filera.
- b. Repartits en un cercle.

Enunciat 4.8

S'escull un nombre a l'atzar entre l'1 i el 1000. Trobis la probabilitat de que sigui múltiple de 2 o de 3 o de 4 o de 5.

Enunciat 4.9

Es llancen a la vegada dues monedes imparcials i distingibles. S'anota $C = \{\text{Surt cara}\}$ i $X = \{\text{Surt creu}\}$. Estudiis els possibles esdeveniments.

Enunciat 4.10

Es pretén estudiar la probabilitat de presentar alguna de tres característiques: ulls blaus, sexe femella i cabell ros. Dins una població amb probabilitats respectives: 0.2, 0.49 i 0.35.

Enunciat 4.11

Una àlgebra finita A posseeix tres àtoms A , B i C amb probabilitats respectives: $1/4$, $1/3$ i $5/12$. Determinis cadascun dels esdeveniments d' A i calculis les seves probabilitats.

Enunciat 4.12

Sigui Ω el conjunt de casos possibles que resulten de la tirada d'un dau ordinari. Es consideren els esdeveniments: $A = \{1, 5, 6\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$.

Trobis els àtoms de l'àlgebra generada pels esdeveniments A i B i les seves respectives probabilitats.

Enunciat 4.13

Es llancen, simultàniament, dues monedes i un dau. Es demana:

- Descriguis l'espai d'esdeveniments elementals Ω apropiat.
- Expressis explícitament els següents esdeveniments:
 - $A = \{ \text{surten dues cares i un nombre senar} \}$
 - $B = \{ \text{surt un cinc} \}$
 - $C = \{ \text{surt exactament una cara i un nombre parell} \}$
- Expressis explícitament els següents esdeveniments: A i B ocorren, només B ocorre, B o C, ocorren.

Enunciat 4.14

Siguin A i B esdeveniments tals que $P(A) = 1/4$, $P(A \cup B) = 3/4$.

Calculis $P(A \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$, $P(A^c \cup B^c)$ i $P(B \cap A^c)$.

Enunciat 4.15

Provis que, per a tres esdeveniments A, B, C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Enunciat 4.16

Es demana la probabilitat de que una carta extreta aleatòriament d'una baralla de 52 cartes sigui un as o un cor.

Enunciat 4.17

Entre vint alumnes n'hi ha quatre amb els ulls de color blau. Si s'escullen dos alumnes a l'atzar, quina és la probabilitat de que:

- Ambdós tinguin els ulls de color blau.
- Cap dels dos tingui els ulls de color blau.
- Almenys un alumne tingui els ulls de color blau.

Enunciat 4.18

Un dau està trucat de manera que la probabilitat de sortir un tres o un cinc és un 20 % més gran que la de sortir altre numero qualsevol. Trobis la probabilitat de que:

- Surti un nombre parell.
- Surti un tres o un cinc.

5 - Dependència i independència estocàstica

Enunciat 5.1

S'extreu una carta d'una baralla anglesa de 52 cartes. Comprovis quins dels següents parells d'esdeveniments són independents.

- $A = \{\text{rei}\}$ $B = \{\text{piques}\}$
- $A = \{\text{figura}\}$ $B = \{\text{piques}\}$
- $A = \{\text{rei}\}$ $B = \{\text{figura}\}$

Enunciat 5.2

En un joc de daus s'ha apostat pel número 5. Es llança el dau, i abans de veure què ha sortit, ens diuen que és un valor senar. Quina és la probabilitat de guanyar?

Enunciat 5.3

Un esdeveniment pot ser independent de sí mateix?

Enunciat 5.4

Calculis amb quin nombre de tirades, de dos daus de sis cares —amb cares equiprobables— resultaria rendible apostar a un doble sis?.

Enunciat 5.5

Sobre 818 individus s'ha controlat l'efecte d'immunitat que produeix la vacuna contra el còlera i s'han registrat els següents resultats:

	immunes	no immunes	total
vacunats	276	3	279
no vacunats	473	66	539
total	749	69	818

Es pot afirmar que hi ha dependència entre ésser vacunat i ser immune al còlera? (amb $\alpha = 0.05$).

Enunciat 5.6

Es llancen dos daus a l'aire. Estudiïis la independència dels esdeveniments:

- $A =$ "El resultat del primer dau és un nombre parell."
- $B =$ "El resultat del segon dau és un nombre senar."
- $C =$ "El resultat dels dos daus són iguals: o bé parells o bé senars."

Enunciat 5.7

Es llancen dos daus. Si les cares que apareixen són diferents, trobis la probabilitat de que:

- La suma de les cares sigui un nombre senar.
- La suma de les cares sigui superior a 7.

Enunciat 5.8

Es llança un dau de sis cares tres vegades. Calculeu la probabilitat d'obtenir cada cop una puntuació més baixa.

Enunciat 5.9

Dos jugadors llancen un dard tres cops. Calculeu la probabilitat de fer diana almenys un cop, sabent que les seves probabilitats respectives de fer diana són, respectivament, $1/5$ i $1/7$.

Enunciat 5.10

Es disposa d'un dau amb únicament tres resultats possibles: 1, 2 i 3. Tots tres igualment probables. Es llança el dau. Si surt un 3 es guanya. Si surt 1 o 2, es continua llançant el dau fins a repetir el valor de la primera tirada i guanyem, o bé sortir un 3 i —en aquest cas— perdem.

Quina és la probabilitat de guanyar?

Enunciat 5.11

En una cel·la hi ha tres presos: A, B i C. Tots amb igual probabilitat de ser condemnat i únicament un d'ells ho serà. El pres A sap que un dels altres dos presos —B o C— no serà condemnat i li pregunta al carceller —que sempre diu la veritat—. Com poden modificar la pregunta i la resposta del carceller la probabilitat de que A sigui condemnat?

Enunciat 5.12

Tres arquers disparen tres fletxes simultàniament, amb probabilitats de fer diana: 0.7, 0.8 i 0.6 respectivament. Calculeu:

- La probabilitat de cadascuna de les possibles dianes.
- La probabilitat d'almenys una diana.

Enunciat 5.13

Estudieu la possible independència dels esdeveniments A i B en els casos:

- A i B són mútuament excloents i de probabilitat no nul·la.
- A és de probabilitat no nul·la i inclòs en B.
- A és qualsevol esdeveniment i la probabilitat de B és nul·la.

Enunciat 5.14

En un bar, n persones —amb $n \geq 3$ — juguen a parells o senars. Qui mostra un resultat diferent a tots els altres perd i paga una ronda. Quina és la probabilitat de perdre?

Enunciat 5.15

Tres esdeveniments —A, B i C— són independents i es verifica

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{8}; \quad P(A \cdot C) = \frac{1}{10}; \quad P(B \cdot C) = \frac{1}{20}$$

- Calculis $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ i $P(A^c \cdot B^c \cdot C^c)$.
- Si només fossin independents dos a dos, es podria calcular —amb les dades anteriors— $P(A \cup B \cup C)$?

Enunciat 5.16

En un institut de Secundària, el 20% dels estudiants ha suspès Física, el 18% ha suspès Química i el 15% ha suspès les dues matèries. Es selecciona un estudiant a l'atzar:

- Si ha suspès Química, quina és la probabilitat de que hagi suspès també Física?
- Si ha suspès Física, quina és la probabilitat de que hagi suspès també Química?
- Quina és la probabilitat de que hagi suspès o bé Física o bé Química?

Enunciat 5.17

Una urna conté 5 boles blanques i 2 boles negres ($5B, 2N$). Es prenen tres boles de l'urna —aleatòriament, una rere l'altra—, sense reposició. Calculis la probabilitat de que les dues primeres boles siguin blanques i la tercera sigui negra.

Enunciat 5.18

Siguin A i B esdeveniments tals que $P(A)=1/5$; $P(B)=1/2$; $P(A \cap B)=1/3$.

Calculis:

- $P(A \mid B)$
- $P(B \mid A)$
- $P(A \cup B)$
- $P(A^c \mid B^c)$
- $P(B^c \mid A^c)$

Enunciat 5.19

Trobis la probabilitat de que, en un banc, nois i noies siguin seguts alterns si:

- Hi ha 4 nois i 3 noies.
- Hi ha 3 noies i 3 nois.

Enunciat 5.20

Demostrar que si A i B són esdeveniments independents, aleshores també ho són els seus complementaris, A^c i B^c .

Enunciat 5.21

Segons una companyia d'assegurances, la probabilitat de que un home visqui 5 anys més és $1/5$, i la probabilitat de que la seva dona visqui 5 anys més és $1/4$. Trobis la probabilitat de que:

- Ambdós visquin 5 anys més.
- Almenys un dels dos visqui després de 5 anys.
- Cap dels dos visqui després de 5 anys.
- Només la dona visqui després de 5 anys.

Enunciat 5.22

Tres classes d'estudiants tenen 25, 24 i 26 alumnes, respectivament.

- Es forma un equip amb un estudiant de cada classe. De quantes maneres es pot formar l'equip?
- I si es forma amb dos estudiants de cada classe?

Enunciat 5.23

Quantes triplets diferents es poden formar amb els nucleòtids **A**denina, **G**uanina, **C**itosina?

Enunciat 5.24

Si es llença un dau 3 cops i s'anota ordenadament la puntuació, quina és la probabilitat de que:

- El primer cop surti un sis i els altres cops diferent de sis.
- Un cop surti un sis i els altres cops diferent de sis.
- Surtin dos sisos i diferent de sis.
- Almenys una tirada surti diferent de 6.

Enunciat 5.25

En una reunió, hi ha tres dones i dos homes.

- Es sap que hi ha constituïdes dues parelles heterosexuales. De quantes maneres diferents es poden imaginar?
- I si es sap que hi ha només una parella?

Enunciat 5.26

S'ha fet un examen amb vint preguntes de tipus test de resposta cert o fals, i és obligatori contestar totes les preguntes.

- De quantes maneres diferents es pot respondre l'examen?
- De quantes maneres diferents s'encerta el 50 % de les respostes?
- I de contestar-ne k de certes?

Enunciat 5.27

Quants resultats diferents es poden obtenir llançant cinc vegades una moneda a l'aire?

Enunciat 5.28

Es disposa d'una baralla francesa de 52 cartes diferents, a repartir entre quatre jugadors.

- a. De quantes maneres es pot fer el repartiment?
- b. Quants repartiments donaran els quatre reis a un mateix jugador?

6 - Teorema de Bayes i de les Probabilitats Totals

Enunciat 6.1

En persones de més de 65 anys, la probabilitat de patir alguna mena de càncer —a España— és aproximadament del 0.38 %.

[Dades de l'any 2020. Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).]

Una determinada prova diagnòstica correctament la malaltia amb un 78% de certesa i presenta un 7% de falsos positius. Persones sanes incorrectament diagnosticades com a malaltes.

Calculis, en una persona major de 65 anys:

- La probabilitat de que li diagnostiquin la malaltia.
- La probabilitat de que l'hagin diagnosticat correctament i que efectivament pateixi càncer.

Enunciat 6.2

Suposis que el 20 % de la població és afectat per una determinada malaltia M i que un 1% dels malalts moren $M^\dagger$. Calculis la probabilitat d'emmalaltir i de morir.

Enunciat 6.3

Una determinada indústria utilitza tres màquines que produeixen el 40, 25 i 35 % de tota la producció respectivament. El percentatge de peces defectuoses de cadascuna de les màquines és, respectivament: 1, 1.3 i 1.4 %.

Es selecciona una peça a l'atzar.

- Calculis la probabilitat de que sigui defectuosa.
- Si ha estat defectuosa, quina és la probabilitat de que l'hagi fabricat la màquina 1? I la de la màquina 2?
- Calculis la probabilitat de que no sigui defectuosa i fabricada per la màquina 3.

Enunciat 6.4

En un centre de recuperació de tortugues marines es disposa d'un total de 20 tortugues malaltes, de l'espècie *Caretta caretta*. Les tortugues són repartides en tres estanys diferents, en nombre de 8, 4 i 8 exemplars respectivament. Segons la seva gravetat reben un tractament o altre.

El 62,5 % dels exemplars del primer estany estan greus. També ho estan el 50 % dels exemplars del segon estany i el 25 % dels exemplars del tercer estany.

Calculis:

- Quina és la probabilitat de que una tortuga seleccionada a l'atzar no estigui greu?
- Quina és la probabilitat de que una tortuga greu provingui del primer o del segon estany?
- Quina és la probabilitat de que una tortuga no estigui greu i provingui del primer estany?

Enunciat 6.5

S'anomena fiabilitat d'un sistema la probabilitat de que funcioni correctament. Es disposa d'un circuit amb 5 bombetes elèctriques connectades en sèrie. La probabilitat de que cadascuna de les bombetes del circuit funcioni al cap de 100 hores és de 0.99. Suposant que cada bombeta s'espalla independentment de les altres,

- Calculis la fiabilitat del sistema a les 100 hores de funcionament.
- Calculis la fiabilitat de dos sistemes com l'anterior, connectats en paral·lel [52], a les 100 hores de funcionament.

Enunciat 6.6

La Maria menteix el 15% de les vegades, mentre que en Jordi diu la veritat 6 de cada 9 cops. S'extreu una bola, a l'atzar, d'una bossa de composició (5B, 10N). Tant la Maria com en Jordi han afirmat que la bola extreta és blanca. Calculis la probabilitat de que la bola sigui realment blanca.

Enunciat 6.7

Dues màquines A i B han produït, respectivament, 50 i 50 peces. Se sap que A produeix un 2% de peces defectuoses, i B un 1%. S'agafa una peça a l'atzar i es demana:

- La probabilitat de que la peça sigui defectuosa.
- Sabent que la peça és defectuosa. Quina és la probabilitat de que sigui feta per la primera màquina?

Enunciat 6.8

Es disposa de tres urnes de composició: $U_1(1B, 2N, 3V)$, $U_2(2B, 3N, 4V)$, $U_3(3B, 4N, 5V)$. S'escull una urna a l'atzar —amb igual probabilitat— i es pren una bola.

Es demana:

- La probabilitat de que la bola sigui vermella.
- Sabent que la bola és vermella. Probabilitat de que sigui de la urna U_3 .

Enunciat 6.9

Es disposa de dues urnes, de composició: $U_1 = \{BBBBBN\}$ i $U_2 = \{NNNNBB\}$.

Es selecciona una de les urnes a l'atzar i es prenen tres boles, una rere l'altra, amb reposició. El resultat és l'esdeveniment $B = \{bbn\}$, on b indica "bola blanca" i n indica "bola negra".

Calculis la probabilitat de que la mostra provingui de U_1 .

Enunciat 6.10

En un examen d'opció múltiple, cada pregunta té quatre possibles. Un estudiant en concret es sap el 60 % del temari. Quina és la probabilitat de respondre correctament la pregunta i saber-ne realment la resposta?

Enunciat 6.11

L'any 2020 el 0.237 % dels homes de 68 anys d'edat varen desenvolupar un determinat tipus de càncer. Altres estudis varen calcular que, al llarg de tota la vida, el 0.043 % dels homes desenvolupen aquest tipus de càncer.

Sabent que el 2.5 % de la població masculina tenia, l'any 2020, 68 anys, calculeu la probabilitat de que un home de 68 anys, desenvolupés aquest tipus de càncer.

[Dades basades en la Red Española de registros de Cáncer (REDECAN)]

Enunciat 6.12

Es divideix una baralla francesa de 52 cartes en dues parts: parells i senars. Es llança un dau. Si surt un sis, es pren una carta de les del grup parell (P); en cas contrari, es pren una carta de les del grup senar (S). Si resulta ser una figura (F), trobeu la probabilitat de que sigui la reina.

Enunciat 6.13

S'omple una urna llançant una moneda a l'aire dos cops. Si surt cara posem una bola blanca, en cas contrari, una de negra. Posteriorment s'extreuen dues boles i la primera resulta ser negra. Trobeu la probabilitat de que la segona bola també ho sigui.

Enunciat 6.14

En una Universitat finalitza la carrera (F) el 10 % dels estudiants d'Enginyeria (E), el 25 % dels de Ciències (C) i el 80 % dels de Lletres (L) —no s'imparteix cap més estudi—.

Es sap que el 30% dels alumnes són d'Enginyeria, el 30% són de Ciències i el 40% de Lletres. S'escull un estudiant a l'atzar i es demana:

- La probabilitat de que sigui d'Enginyeria i hagi finalitzat la carrera.
- Sabent que ha finalitzat la carrera, quina és la probabilitat de que estudiï Ciències.

Enunciat 6.15

D'urna, amb composició $U(2B, 3N, 4V)$, s'extreuen tres boles, una rere l'altra. La primera bola és vermella, la segona no es mira i la tercera és blanca. Trobeu la probabilitat de que la segona bola sigui negra.

Enunciat 6.16

Un metge titular i el seu ajudant han de fer un diagnòstic. El metge titular diagnostica correctament el 95 % dels casos. L'ajudant ho fa en un 70 %. La probabilitat de deixar que l'ajudant faci el diagnòstic és 0.4.

Sabent que el diagnòstic ha estat correcte, calculeu la probabilitat de que el diagnòstic hagi estat fet pel metge ajudant.

Enunciat 6.17

Calculeu la probabilitat de que un jugador hagi guanyat fet trampa al apostar a un número d'un dau de sis cares, segons les dues hipòtesis següents.

- El 25 % dels jugadors són tramposos.
- La probabilitat de jugador trampós és igual a p .

Enunciat 6.18

En un sistema d'alarma, la probabilitat de que es produeixi un motiu d'alarma és 0.001. Si aquesta es produeix, la probabilitat de que l'alarma funcioni és 0.97. La probabilitat d'una falsa alarma és 0.001.

Trobis:

- La probabilitat de que, havent funcionat l'alarma, no hi hagi cap motiu.
- La probabilitat de que hagi hagut motiu i l'alarma no hagi funcionat.

Enunciat 6.19

Es disposa de dues urnes (A i B) de composició $U_A(5N, 3B)$ i $U_B(1N, 2B)$. Es llança un dau de sis cares.

Si surt un número major de 4, es passa una bola de U_B a U_A i es pren posteriorment una bola de U_A .

Amb qualsevol altre resultat, es passa una bola de U_A a U_B i es pren posteriorment una bola de U_B .

Trobis la probabilitat de que:

- Les dues boles siguin negres.
- Les dues boles siguin blanques.

Enunciat 6.20

Una capsa conté dues monedes normals i una moneda amb dues creus —sense cara—. Es selecciona una moneda a l'atzar i s'efectua una tirada.

Si surt cara es llança un altre cop. Si surt creu, s'escull una de les altres dues de la capsa i es tira de nou la moneda seleccionada.

- Trobis la probabilitat de que surtin dues creus.
- Si es tira la mateixa moneda els dos cops, trobis la probabilitat de que sigui la moneda de dues creus.
- Trobis la probabilitat de que surti cara els dos cops.

Enunciat 6.21

Dues màquines (M_1 i M_2) produeixen respectivament el 20 i el 80 % de la producció d'una empresa. La probabilitat de que cadascuna de les màquines produeixi una peça defectuosa és respectivament 0.02 i 0.01.

Quina és la probabilitat de que una peça defectuosa (D) —elegida aleatòriament entre la producció— hagi estat fabricada per la primera màquina?

Enunciat 6.22

Una capsa (A) conté set cartes numerades de l'1 al 7. Altra capsa (B) conté nou cartes numerades de l'1 al 9. S'escull una capsa a l'atzar i es pren una carta. Si és numerada amb un nombre parell, es pren una altra carta de la mateixa capsa. En cas contrari, es pren una carta de l'altra capsa.

- Trobis la probabilitat de que la numeració d'ambdues cartes siguin parell.
- En el cas anterior, la probabilitat de que provinguin de la capsa A .
- Trobis la probabilitat de que la numeració d'ambdues cartes siguin senar.

Enunciat 6.23

Una urna conté n boles, entre blanques i negres. Se n'extreu una bola i resulta ser negra. Quina probabilitat hi ha de que k de les n boles siguin negres? —suposant que les $(n + 1)$ possibles composicions de l'urna són equiprobables—.

Enunciat 6.24

El coeficient de falsos positius d'un test d'antígens és del 6 % i el coeficient de falsos negatius és del 2 %. S'aplica el test a un grup de persones i dona positiu en el 10 % de les persones. Quina és la probabilitat de que una persona seleccionada a l'atzar presenti realment l'antigen?

Enunciat 6.25

A la taula següent es mostren les freqüències dels diferents grups ABO i Rh en una població, en %:

%		%	
A^+	37	AB^+	3
A^-	9	AB^-	0.5
B^+	6	O^+	35
B^-	1.5	O^-	8

Es selecciona un individu a l'atzar.

- Quina probabilitat es té de ser Rh^- ?
- Si s'és Rh^+ , quina probabilitat es té de ser del grup A ?
- Quina probabilitat es té de ser donant o receptor universal?
- Quina probabilitat hi ha de que es puguin donar sang mútuament?

Enunciat 6.26

Certs estudis epidemiològics indiquen que el 3.5 % de les persones entre 75 i 79 anys és diagnosticada d'Alzheimer. El TC (tomografia computeritzada) detecta el trastorn en el 85 % dels casos, amb un 1 % de falsos positius entre persones sanes. Quina probabilitat té una persona d'aquesta edat, diagnosticada d'Alzheimer, de que realment el pateixi?

Enunciat 6.27

S'analitzen mostres d'aigua d'una bassa propera a una planta química per tal de detectar-hi la presència de metalls pesants. El 40 % de les mostres presenta nivells tòxics de plom o de mercuri; el 35 % nivells tòxics de plom; i un 15 % de les mostres conté un nivell alt d'ambdós metalls. Sobre una mostra aleatòria, calculeu les probabilitats de que:

- a. Contingui un nivell alt de mercuri.
- b. Únicament contingui nivells elevats de plom.
- c. Contingui un nivell alt de mercuri, sabent prèviament que no conté plom.
- d. No contingui cap nivell alt ni de plom ni de mercuri.

7. Variables aleatòries i funcions de distribució

Enunciat 7.1

Posis un exemple de variable aleatòria amb el llançament d'un dau.

Enunciat 7.2

El nombre de fractures d'una roca és una variable aleatòria discreta X amb $Rang(X)$ dins l'interval $[0,4]$ i massa de probabilitat $P_a = P(X = a) = ka^2$, amb $a \in Rang(X)$.

Determinis:

- El valor del paràmetre $k > 0$.
- El nombre mitjà de fractures i la variància.
- La moda.

Enunciat 7.3

Posis un exemple de funció de distribució d'una variable aleatòria discreta.

Enunciat 7.4

Es llança una moneda tres cops. Sigui X el nombre de cares observades. Trobis la funció de distribució de probabilitat de X .

Enunciat 7.5

Sigui X una variable aleatòria absolutament contínua, de funció de densitat de probabilitat:

$$\begin{cases} f(x) = k \times (1 + x) & \text{si } x \in (0, 3) \\ f(x) = 0 & \text{si } x \notin (0, 3) \end{cases}$$

Es demana:

- Trobis la constant k i la funció de distribució de probabilitat.
- Probabilitat de que X sigui comprés entre 1 i 2.
- Probabilitat de que X sigui menor que 1.
- Sabent que X és major que 1, probabilitat de que sigui menor que 2.

Enunciat 7.6

Les formigues marquen el rastre amb feromones. Sigui X la variable aleatòria que mesura el temps d'esvaïr-se la feromona. Suposis que la funció de densitat de X és

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{x}{2}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

- Representis la funció de densitat de X .
- Calculis la probabilitat de que el rastre sigui actiu menys de 1 minut.
- Calculis el temps mitjà de persistència del rastre.
- Calculis una mesura de dispersió.

Enunciat 7.7

La funció de densitat de una variable aleatòria absolutament contínua és:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 2) \end{cases}$$

Determinar a i b , sabent que $P(0.5 < X \leq 1) = 0.25$.

Enunciat 7.8

La funció de densitat d'una variable aleatòria absolutament contínua és:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Determinis la seva funció de distribució i calculis:

- $P(0 < X \leq 1)$
- $P(X \leq 0.5)$
- $P(X \geq 0.5)$

Enunciat 7.9

Es llancen dos daus a l'aire. Determinis la funció de distribució de la suma de punts obtinguts.

Enunciat 7.10

La duració, en hores, d'un dispositiu electrònic és una variable aleatòria de funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10000} e^{\frac{-x}{10000}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Troba:

- a. La probabilitat de que una bombeta duri entre 5000 i 10000 hores.
- b. La probabilitat de que una bombeta duri més de 5000 hores.
- c. La probabilitat de que una bombeta duri més de 10000 hores.

8. Distribució conjunta d'una o més variables

Enunciat 8.1

Es llancen dos daus. Siguin les variables aleatòries:

- $X = \{ \text{El nombre de punts obtinguts pel primer dau} \}$
- $Y = \{ \text{El valor màxim dels punts obtinguts a cadascun dels dos daus} \}$

Es demana:

- a. La funció de densitat conjunta bivariant.
- b. Les funcions de densitat marginals.
- c. Són X, Y independents?
- d. La distribució de la variable X , condicionada a $Y = 4$.

Enunciat 8.2

Es vol calcular la probabilitat de que un vianant sigui atropellat per un cotxe mentre creua la carretera en un pas de vianants, sense parar atenció al semàfor.

Sigui S la variable aleatòria discreta, que pren els valors $S = \{R, G, V\}$, segons el semàfor estigui en roig ($S = R$), groc ($S = G$) o verd ($S = V$).

Sigui A la variable aleatòria discreta, que pren els valors $A = \{1, 0\}$, segons el vianant sigui atropellat ($A = 1$) o no ($A = 0$). Amb $P(A = 1 | S = R) = 0.001$, $P(A = 1 | S = G) = 0.01$ i $P(A = 1 | S = V) = 0.7$.

Suposis que $P(R) = 0,3$ —el semàfor, pels vehicles, és en roig el 30 % del temps—, $P(G) = 0,1$ —el semàfor és en groc el 10 % del temps— i $P(V) = 0,6$ —el semàfor és en verd el 60 % del temps—.

Enunciat 8.3

Es llancen dos daus. Siguin X, Y les variables aleatòries

- $X = \{ \text{La suma dels punts obtinguts} \}$
- $Y = \{ \text{La diferència entre els punts del primer dau i del segon} \}$.

Es demana:

- a. La funció de densitat conjunta.
- b. Les funcions de densitat marginals.
- c. Són X, Y independents?

Enunciat 8.4

Es disposa de les dades següents sobre l'hàbit de fumar, segons el sexe.

	Fumador/a	No fumador/a	Total
Dona	60	140	200
Home	70	130	200
Total	130	270	400

- Calculis la probabilitat marginal de ser fumador i la probabilitat condicionada, segons el sexe.
- És la probabilitat de fumar independent del sexe?
- Si sabem que una persona és fumadora, quina probabilitat hi ha de que sigui dona?

Enunciat 8.5

La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries absolutament contínues és:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + x^2y) & \text{si } x \in (0, 1) \text{ i } y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en qualsevol altre cas (si } x \text{ o } y \notin (0, 1)) \end{cases}$$

Es demana:

- Calcular el valor de k .
- Funcions de densitat marginals.
- Són independents?

Enunciat 8.6

Una parella queda en trobar-se entre les 21 i les 22 hores. Cadascun esperarà l'altre no més d'un quart d'hora. Calculis la probabilitat de que es trobin.

- Sabent que el primer arriba a les 21h 30'.
- Arribant un i l'altre en qualsevol altre moment, aleatòriament.

Enunciat 8.7

Un bastó de longitud h es trenca, a l'atzar, en tres fragments. Quina és la probabilitat de que amb ells es pugui formar un triangle?

Enunciat 8.8

Siguin b i c dos números compresos entre 0 i 1.

Trobis la probabilitat de que l'equació $x^2 + bx + c = 0$ tingui arrels reals, en els casos:

- Que b i c s'escullin independentment a l'atzar.
- Que la funció de densitat conjunta de (b, c) sigui:

$$f(b, c) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2b^2 + c^2) & , \text{ si } b, c \in (0, 1) \\ 0 & , \text{ en altre cas} \end{cases}$$

Enunciat 8.9

La funció de densitat conjunta de dues variables aleatòries X i Y és:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x + y) & \text{si } x, y \in (0, 1) \\ 0 & \text{en altre cas} \end{cases}$$

Trobis la funció de distribució conjunta.

Enunciat 8.10

Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat $f(x, y)$ igual a:

0	si $(x \leq -2)$
$\left(\frac{x}{2}\right)$	si $(-2 < x < 0)$
2	si $(x = 0)$
$\left(\frac{x}{2}\right)$	si $(0 < x < 2)$
0	si $(x \geq 2)$

Calculis $P(-1/3 \leq x \leq 1/3)$ i la funció de distribució de x .

9. Esperança i variància d'una variable aleatòria

Enunciat 9.1

Es venen 100000 bitllets de loteria a 20 € cadascun, per al sorteig d'un premi de 400000 €. Quin és el benefici esperat d'una persona que compra tres bitllets?

Enunciat 9.2

Sigui X una variable aleatòria amb $\mu=25$ i $\sigma=4$. Determinis l'esperança, la variància i la desviació típica de la mitjana aritmètica d'una mostra de mida 100.

Enunciat 9.3

S'escullen n nombres a l'atzar, dins l'interval $(0,1)$, amb X el major d'aquests nombres.

Calculis:

- La funció de distribució i de densitat de X .
- L'esperança i la variància de X .

Enunciat 9.4

Es disposa d'una mostra, en segons, del temps de dissolució d'un fàrmac en els sucs gàstrics: 43.4, 44.6, 45.1, 45.6, 45.9, 46.8, 47.6, 44.6, 45.2, 46.7, 44.8

Quina és la variabilitat teòrica del temps de dissolució, amb un nivell de confiança del 95%?

Enunciat 9.5

Una urna U conté 2 boles blanques i 2 boles negres. Tres jugadors extreuen, respectant l'ordre, una bola sense devolució. El primer jugador que treu una bola blanca guanya 20 €. Si ningú guanya, al acabar la ronda, es col·loquen de nou totes les boles i es torna a començar respectant l'ordre d'extracció.

- Calculis l'esperança de cada jugador.
- Si els 20 € els posen entre tots ells, quant els tocaria posar a cadascun per tal de que el joc fos equitatiu?

Enunciat 9.6

Calculis l'esperança i la variància de la variable aleatòria absolutament contínua, amb funció de densitat de probabilitat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}, & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Enunciat 9.7

Calculis l'esperança i la variància del nombre de punts obtinguts en la tirada d'un dau ordinari.

Enunciat 9.8

El nombre total de punts obtinguts en n tirades de dau ordinari, es designa per X . Calculis $E(X)$ i $SD(X)$.

Enunciat 9.9

Es planteja l'experiment aleatori de llançar dues monedes amb X la variable aleatòria que comptabilitza el nombre de cares obtingudes. Calculis el rang de X , la seva massa de probabilitat i la seva esperança.

Enunciat 9.10

La duració, en minuts, d'una trucada telefònica s'assimila a una variable aleatòria amb funció de distribució:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Trobis:

- La funció de densitat de probabilitat.
- L'esperança matemàtica o duració mitjana.
- La probabilitat de que la duració d'una trucada sigui entre 3 i 6 minuts.
- La probabilitat de que una trucada, que ja dura més de 3 minuts, no passi de 6.

Enunciat 9.11

Un jugador extreu una carta d'una baralla francesa de 52 cartes. Si surt una figura guanya 20 €. Si surt un as ni guanya ni perd. Si surt altra carta qualsevol perd 11 €. Trobis l'esperança matemàtica del joc.

Enunciat 9.12

En un joc d'atzar, es llança una moneda. Si surt cara, es guanyen dos euros, en cas contrari, no es guanya res. Quina quantitat s'hauria de demanar per poder apostar si es vol que l'esperança del joc sigui de -0.5?

Enunciat 9.13

Calculis l'esperança i la variància de la variable aleatòria "nombre de punts obtinguts al llançar dos daus".

Enunciat 9.14

La funció de densitat d'una variable aleatòria és:

$$f(X) = F'(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ e^{-2x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Trobis, si existeixen, la seva esperança matemàtica i la seva variància.

10. Descomposició de la variància

Enunciat 10.1

Calculis la variància de i entre els conjunts de dades.

$$A = \{7, 9, 11\}$$

$$B = \{11, 14, 15, 17\}$$

Enunciat 10.2

S'ha mesurat el colesterol sèric, en mg/L en dos grups d'individus: un (P) ha rebut un placebo i l'altre (T) un tractament per tal de reduir el colesterol sèric.

$$P = \{4.3, 5.15, 6.32, 4.25, 4.51, 3.98, 4.17, 4.8\}$$

$$T = \{3.25, 3.70, 3.52, 4.29, 3.41\}$$

Analitzis la intravariància i la intervariància dels dos grups.

És efectiu el tractament?

Enunciat 10.3

Per tal de mesurar els grams de coure per cada 100 g de calcopirita —la principal mena del coure— s'obtenen mostres comparables a tres localitats i tres profunditats diferents.

Les dades recollides es resumeixen en la següent taula:

	Localitat 1	Localitat 2	Localitat 3
Profunditat 1	11.7	12.2	16.5
Profunditat 2	11.6	14.2	18.8
Profunditat 3	9.8	14.9	14.3

Es pot deduir —segons aquests resultats— quin factor —localitat o profunditat— és més rellevant?

Quin seria el millor criteri per tal d'explotar un jaciment, segons les dades recollides?

11. Teorema de Chebyshev

Enunciat 11.1

Donada una distribució de mitjana $\bar{x} = 25$ i $\sigma = 4$, quin percentatge de les dades garanteix l'interval (13, 37)?

Enunciat 11.2

A un acte determinat hi assisteixen una mitjana de 60 persones, amb una desviació típica de $\sigma = 2$. Quantes cadires hem de col·locar per assegurar que tots els assistents podran seure's, amb una probabilitat del 80 %?

Enunciat 11.3

Una classe d'estudiants de segon de batxillerat té una alçada mitjana de 178 cm amb una desviació estàndard de 2 cm. Al menys, quin percentatge de la classe hauria de ser dins l'interval (174, 182)?

Enunciat 11.4

S'ha comprovat que els ordenadors d'una empresa determinada duren una mitjana de tres anys sense avaries de hardware, amb una desviació estàndard de dos mesos. Al menys, quin percentatge dels ordenadors duren entre 31 i 41 mesos?

Enunciat 11.5

Les bactèries en un cultiu viuen durant un temps mitjà de tres hores amb una desviació estàndard de 10 minuts. Al menys, quina fracció del cultiu bacterià viu entre dos i quatre hores?

Enunciat 11.6

En un anàlisi de salut —realitzat en una escola de primària— es constata que el pes mitjà d'un grup de 50 alumnes és de 45 kg amb una desviació típica de 6 kg.

Un alumne en concret pesa 3 kg menys que la mitjana. Es pot afirmar que l'alumne és massa prim?

Enunciat 11.7

Quin és el menor nombre de desviacions estàndard de la mitjana a la que hem d'utilitzar per tal d'assegurar-nos de que tenim al menys el 50% de les dades d'una distribució?

Enunciat 11.8

La ruta d'un autobús té una duració mitjana de 50 minuts amb una desviació estàndard de 2 minuts. Un cartell promocional de la ruta diu que "el 95% dels cops la ruta dura entre A i B minuts". Quins valors numèrics corresponen amb A i B ?

Enunciat 11.9

Un fabricant de bateries afirma que les seves bateries tenen una vida útil de 100 hores amb una desviació estàndard de 5 hores. Quin interval contindrà al menys el 90 % dels períodes de funcionament de les bateries?

Enunciat 11.10

Es mesura la concentració de lactat en sang arterial —en mil·limols per litre— de 6 persones joves. La mesura s'efectua abans de realitzar un exercici controlat, en quatre moments durant l'exercici i en altres quatre moments durant el període de recuperació.

Es registren els resultats en una taula.

	Repòs	Durant l'exercici				Durant la recuperació			
		5'	10'	20'	30'	5'	20'	35'	65'
1	0.93	7.60	8.25	6.70	6.49	4.35	2.05	1.35	0.85
2	0.55	3.95	4.31	8.85	4.38	6.22	2.98	2.02	0.58
3	0.87	6.54	6.52	4.56	8.75	2.45	1.17	0.76	0.95
4	0.62	4.27	5.15	7.29	6.72	3.57	2.71	1.21	1.10
5	0.72	5.85	7.31	5.88	4.88	3.81	1.84	1.58	0.62
6	0.79	5.41	6.30	6.96	7.70	5.62	2.36	1.29	0.79

Trobis els intervals al 75 % (per a $k = 2$).

Enunciat 11.11

La mitjana dels sous d'una empresa és de 1600 €, amb una desviació estàndard de 100 €.

- Quin percentatge de treballadors té un sou d'entre 1200 i 2000 €?
- En quin interval de sous es trobarà, com a mínim, el 75 % dels treballadors?

Enunciat 11.12

Si X és una variable aleatòria contínua amb $E(X) = 4$ i $E(X^2) = 18$, determinis una fita inferior per a la probabilitat $P(-2 < X < 6)$.

Enunciat 11.13

Es suposa que un mesurament té una mitjana μ i una variància $\sigma^2 = 16$. Sigui X_n la mitjana de n mesuraments independents.

Quants mesuraments s'han de fer si es vol que $P(|X_n - \mu| \geq 1) \geq 0.95$?

Enunciat 11.14

A una sala de cinema acudeixen —per terme mitjà— 100 persones per sessió, amb una desviació típica de $\sigma = 10$. El cine té un afora de 150 butaques. Quina és la probabilitat de que s'ompli en una determinada sessió? —es suposa la variable aleatòria simètrica respecte la seva esperança matemàtica—.

12. Risc relatiu i Odds ratio

Enunciat 12.1

La taula recull la informació sobre el tabaquisme (T) de 200 individus amb malaltia coronària (C) i de 300 individus sans (C^c). Calculis el risc que suposa el factor tabac sobre la malaltia coronària.

	T^c	T	Total
C	75	125	200
C^c	225	75	300
	300	200	

Enunciat 12.2

Mitjançant un disseny cohort, s'estudia la relació entre el tabaquisme (T) i una determinada cardiopatia coronària (C). Es controlen 100 fumadors, dels quals 42 patiren una cardiopatia coronària, i 110 no fumadors, dels quals 18 patiren la mateixa cardiopatia. Calculis el risc relatiu i la odds ratio.

	T^c	T
C	18	42
C^c	92	58
Total	110	100

Enunciat 12.3

L'assaig ARRIVE es tracta d'un estudio aleatoritzat, doble cec, controlat amb placebo en el que hi participaren set països, entre juliol de 2007 i novembre de 2016. S'inclouen 12546 pacients, homes majors de 55 anys i dones majors de 60 anys amb risc cardiovascular moderat (aprox. 10 %). S'exclouen els pacients amb alt risc de sagnat —gastrointestinal o d'altre tipus— i els diabètics. Els pacients, assignats aleatòriament —en una proporció 1:1— rebien 100 mg d'aspirina amb coberta entèrica —6270 pacients— o placebo —6276 pacients—, un cop al dia. Durant 60 mesos.

Dins l'estudi, entre d'altres, s'analitza el següent esdeveniment: $C = \{ \text{Mort pel factor de risc de l'estudi} \}$ —mort cardiovascular, infart agut de miocardi, angina inestable, ictus o accident isquèmic transitori—.

La taula següent en recull el resultat de l'estudi, amb $G_1 = \{ \text{Grup que pren el placebo} \}$ i $G_2 = \{ \text{Grup que pren aspirina} \}$

	C^c	C
G_1	5995	281
G_2	6001	269

Es pot afirmar, segons les dades registrades, que l'aspirina disminueix el risc?

Enunciat 12.4

Un estudi va recollir la informació dels naixements a Ontàrio (Canadà) el 1976. Es volia estudiar l'efecte de l'hàbit de fumar de la mare durant l'embaràs sobre la mortalitat perinatal. Es varen recollir les dades següents:

	Nascuts morts	Nascuts vius	Totals
Mare fumadora	619	20443	21062
Mare no fumadora	634	26682	27316
Totals	1253	47125	48378

Enunciat 12.5

En un estudio sobre la hipertensió es pretén investigar l'associació entre patir un infart i el grau de control de la hipertensió. S'analitza una mostra aleatòria de 1238 pacients, i s'observa si han patit o no un infart de miocardi, obtenint-se els següents resultats.

	Hipertensió arterial		
	Mal controlada	Ben controlada	
Infart, sí	17	12	29
Infart, no	425	784	1209
	442	796	

Analitzis si hi ha relació entre tenir la hipertensió arterial mal controlada i patir infart de miocardi segons els resultats anteriors.

És prou fiable el resultat amb un poder estadístic del 80% i un 5 % de nivell de significació amb el nombre de pacients estudiats?

13. Distribució geomètrica i hipergeomètrica

Enunciat 13.1

Un entomòleg desitja capturar un exemplar d'una papallona de l'espècie *Cybosia mesomella* que es troba en un percentatge del 2 %. Calculis la probabilitat de que tingui que capturar 5 papallones d'altre espècie abans de trobar:

- Un exemplar de *Cybosia mesomella*.
- Dos exemplars de *Cybosia mesomella*.

Enunciat 13.2

Es realitza un control antidopatge aleatori a 6 membres de la plantilla d'un equip de futbol amb 18 jugadors. Si 5 dels jugadors de la plantilla s'han dopat. Calculis la probabilitat de que, en el control,

- se'n detecti algun jugador dopat.
- se'n detectin exactament 2 jugadors dopats.

Enunciat 13.3

La probabilitat de que una persona quedi immunitzada mitjançant una dosi d'una determinada vacuna contra el covid-19 és de 0.66. Per augmentar la probabilitat de que quedi immunitzada se li poden administrar dosis extremes de la mateixa vacuna.

Es suposa independència entre vacunacions.

- Quina és la probabilitat d'immunitzar-se amb dues dosis?
- I amb 3 dosis
- I amb n dosis?
- Quantes dosis necessita per a quedar immunitzada amb una probabilitat del 99%?

Enunciat 13.4

Es disposa d'una baralla espanyola de 48 cartes ($N = 48$). Ens interessa únicament el pal de copes, del qual hi ha 12 cartes. Suposis que, d'aquesta baralla, en traiem $n = 8$ cartes sense reemplaçament i ens preguntem quina és la probabilitat que —exactament— hi hagi $k = 2$ copes en aquesta extracció.

Enunciat 13.5

El 10% d'un determinat tipus de llavor no germina. D'un paquet de 1000 llavors n'elegim 500 llavors a l'atzar, quina és la probabilitat de que germinin més de 450 d'aquestes llavors?

Enunciat 13.6

Es disposa d'una urna amb 18 boles blanques i 11 boles negres. Se n'extreuen cinc boles sense reemplaçament de manera aleatòria.

- Calculis la probabilitat de que totes les boles extretes siguin blanques.
- Seria la mateixa probabilitat si l'extracció s'hagués fet amb reemplaçament?

Enunciat 13.7

En una població de 10000 cefalòpodes hi ha un 45% de de l'ordre dels *Teuthida* —els calamars—, un 30 % de l'ordre dels *Sepiolida* —sèpies— i un 25 % de l'ordre dels *Octopoda* —els pops—.

- a. Es seleccionen aleatòriament, sense reemplaçament, 20 cefalòpodes. Determinis la probabilitat de que al menys 2 siguin pops.
- b. Suposis que dels 20 cefalòpodes seleccionats a l'apartat anterior 4 són pops. Calculis la probabilitat de que, si entre aquests 20 en seleccionem 5 sense reemplaçament, només 1 sigui un pop.

Enunciat 13.8

El temari d'unes oposicions està format per 79 temes. L'opositor ha d'escollir un tema de entre quatre seleccionats aleatòriament pel tribunal del temari.

- a. Quants temes s'ha de preparar l'opositor per tenir una probabilitat del 75 % de que li toqui, al menys, un dels temes estudiats?
- b. Quina probabilitat té de que li toqui, al menys, un dels temes estudiats si s'ha preparat 20 temes dels 79 del temari?

14. Distribucions de Bernoulli, Binomial i Multinomial

Enunciat 14.1

Calculis la probabilitat de treure cara al llançar una moneda.

Enunciat 14.2

Calculis la probabilitat d'obtenir un 3 al llançar un cop un dau de sis cares.

Enunciat 14.3

La freqüència de l'ELA familiar o genètica (ELAF) és, aproximadament, de 5 casos per cada 100000 habitants.

- En una població de 60000 habitants, calculis la probabilitat de que 3 individus manifestin la malaltia.
- Quina és la probabilitat de que hi hagi més de 5 individus amb ELAF en una població de 90000 habitants?

Enunciat 14.4

En una determinada regió, el 40 % de la població és afectat periòdicament per una malaltia endèmica i requereix una breu hospitalització. Per una població de 250 habitants, quants llits hauria de tenir disponibles un hospital per tal de poder atendre tots els malalts al menys en el 80% dels casos?

Enunciat 14.5

Es fan vuit tirades amb una moneda. Trobis la probabilitat d'obtenir una ratxa continuada d'almenys tres cares.

Enunciat 14.6

La probabilitat de curació del càncer de bufeta en estadi I és 0.95. En un estudi es vol conèixer la probabilitat de que de 100 pacients en sobrevisquin exactament 80.

Enunciat 14.7

A la taula següent [Font: Banc de Sang i Teixits de les Illes Balears] es mostren les probabilitats dels diferents grups sanguinis del sistema ABO, amb Rh⁺, a les Illes Balears, l'any 2021.

A ⁺	0.46	AB ⁺	0.04
B ⁺	0.07	O ⁺	0.43

Es seleccionen aleatòriament 10 individus Rh⁺ i independents, entre la població. Quina probabilitat hi ha de que 4 siguin A⁺ i 6 siguin O⁺?

Enunciat 14.8

Es llança una moneda a l'aire 100 cops. Sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de cares. Calculeu la probabilitat que en aquests 100 llançaments surtin 60 o més de 60 cares.

Enunciat 14.9

Una determinada malaltia vírica té una incidència sobre la població d'un 10%. S'aplica a 10 individus un determinat test antigènic que té una especificitat d'un 75 % i una sensibilitat del 80 %. Calculis la probabilitat de que exactament 4 individus donin positiu al test.

Enunciat 14.10

La última novel·la d'un autor ha tingut un gran èxit, fins al punt de que el 80% dels lectors ja l'han llegit. Un grup de 4 amics son afeccionats a la lectura.

- a. Quina és la probabilitat de que al grup hagin llegit la novel·la 2 persones?
- b. I com a màxim 2 ?

Enunciat 14.11

Un agent d'assegurances ven pòlisses a cinc persones de la mateixa edat i que desfruiteu de bona salut. Segons les taules actuals, la probabilitat de que una persona en aquestes condicions visqui 30 anys o més és $2/3$.

Calculis la probabilitat de que, passats 30 anys:

- a. Visquin les cinc persones.
- b. Visquin al menys tres persones.
- c. Visquin exactament dues persones.

Enunciat 14.12

Si s'admet que de sis a set de la tarda un número de telèfon de cada cinc està comunicant. Quina és la probabilitat de que, quan es marquin 10 números de telèfon elegits al atzar, només comuniquin dos?

Enunciat 14.13

La probabilitat de que un home encerti en el blanc es $1/4$. Si dispara 10 cops, quina és la probabilitat de que encerti al menys en una ocasió?

Enunciat 14.14

En unes proves d'alcoholèmia s'ha observat que el 5 % dels conductors controlats donen positiu a la prova i que el 10 % dels conductors controlats no duen posat el cinturó de seguretat. També s'ha observat que les dues infraccions son independents. Un guàrdia de tràfic para cinc conductores aleatòriament.

- a. Si tenim en compte que el nombre de conductors és suficientment important como per a estimar que la proporció d'infractors no varia al fer la selecció, determinar la probabilitat de que exactament tres conductores hagin comès alguna de las dues infraccions.
- b. Determinar la probabilitat de que al menys un conductor hagi comès alguna de las dues infraccions.

Enunciat 14.15

La probabilitat de que un article produït en una fàbrica sigui defectuós és $p=0.02$. S'envia una comanda de 10000 articles a uns magatzems. Calculeu el nombre esperat d'articles defectuosos, la variància i la desviació típica.

Enunciat 14.16

El departament de Matemàtiques Aplicades proposa un examen de test consistent en 25 qüestions. Cada qüestió té 5 respostes llistades, sent correcta només una de elles. Si un estudiant no coneix la resposta correcta de cada qüestió i prova sort, es vol saber:

- Quina és la probabilitat de respondre exactament 7 respostes correctes?
- Quina és la probabilitat d'encertar com a màxim 9 respostes?
- Si s'aprova l'examen quan es responen correctament 13 qüestions, quina és la probabilitat de que passi l'alumne que ha provat sort?
- Quin és el conjunt de números menors possibles d'encerts, amb probabilitat al voltant de 0.95?

Enunciat 14.17

Una fàbrica dissenya motors i el 10 % són defectuosos. —el 90 % no són defectuosos—.

Calculeu la probabilitat de dissenyar el tercer motor no defectuós:

- Al quart assaig.
- Al quart assaig o abans.

Enunciat 14.18

Calculeu la probabilitat d'obtenir exactament dues cares al llançar cinc cops una moneda.

Enunciat 14.19

Suposant que la probabilitat de néixer amb sexe masculí és 0.51, calculeu la probabilitat de que en una família de tres fills hi hagi:

- Al menys un nen.
- Al menys una nena.

Enunciat 14.20

Dues persones juguen a cara o creu, i han convingut que la partida s'acaba quan tant la cara com la creu hagin sortit al menys dos cops. Calculeu la probabilitat de que el joc no s'acabi després d'haver fet sis jugades.

Enunciat 14.21

S'extreuen 6 cartes, una rere l'altra, i amb devolució, d'una baralla anglesa de 52 cartes. Trobeu la probabilitat d'obtenir-ne 2 piques, 3 diamants, 1 cor i cap trèvol.

Enunciat 14.22

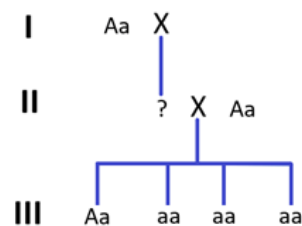
Es suposa que una persona de cada 5 és afeccionada a la música clàssica. Calculeu la probabilitat de que, dels 3 fills d'una família, 2 siguin nens —un d'ells afeccionat a la música clàssica— i 1 sigui nena i afeccionada a la música clàssica. Suposant que el sexe sigui equiprobable.

Enunciat 14.23

Es llança un dau set cops. Determineu la probabilitat de que s'obtinguin dos uns, dos tresos i tres cincs.

Enunciat 14.24

Donat el següent arbre genealògic:



Calculeu la probabilitat dels diferents genotips possibles de l'individu II-1, tenint en compte la seva descendència.

Enunciat 14.25

L'albinisme en els ratolins es deu a un gen recessiu a . Creuant dos individus heterozigots Aa , es poden obtenir individus amb genotip: AA , Aa i aa , amb probabilitats respectives 0.25, 0.5 i 0.25. Trobeu:

- La probabilitat de tenir la descendència: AA , Aa , Aa i aa —sense importar l'ordre—.
- La probabilitat de tenir dos mascles Aa i dues femelles aa .

Enunciat 14.26

A la taula següent es mostren les probabilitats dels diferents grups ABO , amb $Rh^{sup} > +$, a les Illes Balears, l'any 2021 [Font: Banc de Sang i Teixits de les Illes Balears]:

A^+	0.46	AB^+	0.04
B^+	0.07	O^+	0.43

Es seleccionen aleatòriament cent individus Rh^+ i independents entre la població. Quina probabilitat hi ha de que 10 siguin B^+ ?

15. Distribució de Poisson

Enunciat 15.1

La centraleta telefònica d'un hostel, rep un nombre de trucades per minut que segueix una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda = 0.5$. Determinar:

- La probabilitat de que en un minut al atzar, es rebi una única trucada.
- La probabilitat de que en un minut al atzar, es rebin un màxim de dues trucades.
- La probabilitat de que en un minut al atzar, es rebin més de tres trucades per minut.
- Es rebin cinc trucades en dos minuts.
- El nombre de trucades per minut, mínimes que ha de rebre la centraleta perquè hi hagi una probabilitat del 98.5 %.

Enunciat 15.2

El nombre de llavors de la Lleteresa berrugosa (*Euphorbia flavicoma*) que germinen per m^2 segueix una distribució de Poisson de paràmetre 3.

- Quina és la probabilitat de que germinin més de 3 llavors en $1 m^2$?
- Quina és la probabilitat de que germinin més de 130 llavors en $50 m^2$?
- En una determinada zona, s'escullen 10 quadrícules independents, cadascuna de $1 m^2$. Quina és la probabilitat de que al menys en la meitat d'elles germinin més de 3 llavors?

Enunciat 15.3

La probabilitat de que una determinada màquina fabriquï una peça defectuosa és 10^{-4} . En un any es fabriquen $2 \cdot 10^4$ peces. Quina és la probabilitat de que el nombre de peces defectuoses produïdes en un any sigui més de 3?

Enunciat 15.4

En un determinat centre de salut, el nombre de persones que atenen a urgències segueix una distribució de Poisson amb una mitjana de 85 persones en un dia. El servei del sistema col·lapsa amb més de 100 demandes. Es demana:

- Quin percentatge de dies col·lapsarà el servei?
- Quina és la probabilitat de que no hi hagi cap demanda entre les dues i les tres de la tarda?

Enunciat 15.5

Una companyia d'assegurances de vida amb 10^5 assegurats, troba que el 10^{-5} % de la població mor anualment per un determinat sinistre. Es demana:

- La probabilitat de que la companyia hagi de pagar més de 1 accidents d'aquest tipus en un any.
- El nombre d'accidents mitjà anual d'aquest tipus.

Enunciat 15.6

Les sortides d'una estació d'autobusos no tenen una planificació fixa però segueixen una distribució de Poisson de mitjana 18 sortides per hora. Calculis la probabilitat de que:

- En 15 minuts hi hagi 5 sortides.
- La següent sortida sigui abans d'un minut.
- Comptant 24 hores del dia, en, com a màxim, 5 de 60 dies elegits aleatòriament, hi hagi menys de 400 sortides.

Enunciat 15.7

Un determinat genotip té una freqüència d'un 1 %. Calculis la probabilitat de trobar exactament una persona amb aquest genotip en un grup de 300 persones.

Enunciat 15.8

Un servidor web rep unes 300 visites a la hora i no pot establir més de 5 connexions per minut. Es demana:

- La probabilitat de que el servidor col·lapsi.
- La probabilitat de que el servidor rebi una única visita en un minut donat.

Enunciat 15.9

En una persona adulta sana, el valor mitjà dels basòfils en una analítica de sang és de 110 basòfils/ μ L. Quina és la probabilitat de que una analítica de sang en una persona sana contingui menys de 80 basòfils/ μ L?

Enunciat 15.10

Critiquis el següent raonament: si l'esperança de la distribució binomial és np , com np tendeix a λ , l'esperança de la distribució de Poisson és igual a λ .

Enunciat 15.11

En una població el nombre d'accidents setmanals de trànsit segueix una llei de Poisson de paràmetre $\lambda = 1$. Es demana:

- La probabilitat de que en una setmana determinada hi hagi algun accident.
- La probabilitat de que hi hagin quatre accidents en dues setmanes.
- La probabilitat de que hi hagin dos accidents en una setmana i altres dos accidents a la setmana següent.
- És dilluns hi ha hagut un accident. Calculis la probabilitat de que en la mateixa setmana no hi hagi més de tres accidents.

Enunciat 15.12

La freqüència d'accidents de tràfic en 10 cruïlles de Barcelona durant 40 anys, per cruïlla i any, és la següent:

Accidents	Freqüència
0	220
1	132
2	40
3	8
≥ 4	0

Es pot afirmar que el nombre d'accidents de tràfic en les 10 cruïlles és a l'atzar ?

Enunciat 15.13

El nombre de baixes laborals per malaltia que es produeixen en una empresa segueix una llei de Poisson tal que la probabilitat de hi hagi 5 baixes laborals és un 10 % més gran de la que n'hi hagi 3.

- Calculis el valor de λ .
- Calculis el nombre màxim setmanal de baixes laborals, amb probabilitat del 90 %.
- Calculis la probabilitat de cap baixa laboral en 4 setmanes.

Enunciat 15.14

Sigui X una variable aleatòria que segueix una llei de Poisson d'esperança igual a λ . Es defineix una nova variable aleatòria Y com:

- $Y = x/3$, si x és un nombre parell diferent de zero.
- $Y = 0$, si x és un nombre senar.

Trobis la funció de densitat de probabilitat de Y .

Enunciat 15.15

A Barcelona, l'any 2020, amb una població de 1664182 habitants, hi va haver una mitjana de 32 accidents de trànsit diaris. Calculis la probabilitat de que hi hagi 20 accidents en un dia determinat.

Enunciat 15.16

En un informe de gener de 2021 es detalla que la probabilitat de patir una reacció al·lèrgica greu per una vacuna contra la covid-19 és del 0,0025 %. Calculis la probabilitat de que en una mostra de 100000 individus:

- Exactament 2 individus pateixin una reacció al·lèrgica.
- Més de 2 individus pateixin una reacció al·lèrgica.

Enunciat 15.17

S'ha observat que el nombre d'errors per pàgina, en un determinat material imprès és

Nombre d'errors	0	1	2	3	4	5	6
Freqüència	40	30	15	7	2	1	0

Suposant que es segueix una llei de Poisson, calculis la probabilitat de que en una pàgina hi hagi algun error.

Enunciat 15.18

Una determinada màquina produeix, de mitjana, 90 peces defectuoses cada 30 dies. Es demana:

- La probabilitat de produir 5 peces defectuoses en un dia.
- El nombre màxim de peces defectuoses en un dia, amb una certesa aproximada del 90 %.

Enunciat 15.19

En dues hores, el nombre de trucades per minut d'una centraleta telefònica va ser:

Trucades/minut	0	1	2	3	4	5	6	7
Freqüència	6	18	32	35	17	10	2	0

Esbrinis si la variable aleatòria "nombre de trucades per minut" s'ajusta a una distribució de Poisson. (amb $\alpha = 0.05$)

Enunciat 15.20

Al acabar la segona guerra mundial és va voler donar raons científiques per a decidir si el bombardeig de Londres amb les bombes V2 buscava o no objectius militars estratègics concrets. Per fer-ho, es va quadricular Londres en 576 caselles i es varen comptar el nombre de projectils caiguts a cada casella:

nombre de projectils per casella	0	1	2	3	4
nombre de caselles	229	211	93	35	8

Tenint en compte que es varen comptabilitzar 534 projectils V2, determineu si el bombardeig buscava o no objectius militars estratègics.

Enunciat 15.21

Una determinada extensió de terreny s'ha dividit en 100 petites parcel·les d'un metre quadrat cadascuna. S'ha comptat el nombre de llavors d'una determinada espècie de planta, germinades espontàniament, amb els següents resultats:

llavors germinades /m ²	0	1	2	3	4	5
nombre de parcel·les	10	32	30	15	10	3

Pot admetre's, amb $\alpha = 0.05$, que el nombre de llavors/m² s'ajusta a una distribució de Poisson?

Enunciat 15.22

Sigui X la variable aleatòria —amb distribució de Poisson— que recull el nombre de visites diàries d'una pàgina web. Amb un nombre mitjà de visites diàries $\bar{x} = 100$. Calculis —per aproximació a la distribució normal— els casos següents:

- a. La probabilitat de més de 110 visites en un dia.
- b. La probabilitat de menys de 95 visites en un dia.
- c. El nombre de visites diàries tal que la seva probabilitat excedeixi el valor sigui 0.01.

16. Distribució Uniforme contínua i discreta

Enunciat 16.1

D'una estació surt un tren cada 10 minuts. Un viatger hi arriba de sobte. Trobis:

- La funció de distribució de la variable aleatòria “temps d’espera”.
- La probabilitat de que esperi el tren menys de 5 minuts.
- L’esperança i la variància de la variable aleatòria “temps d’espera”.
- Es rebin cinc trucades en dos minuts.
- La probabilitat de que esperi exactament 8 minuts.

Enunciat 16.2

D'una variable aleatòria contínua uniformement distribuïda, se'n coneixen la seva esperança matemàtica m i la seva desviació típica σ . Trobis els extrems a i b de definició de la variable, en funció de m i de σ .

Enunciat 16.3

Sigui $X \sim \mathcal{U}(6)$ la distribució que recull els resultats del llançament d'un dau de sis cares.

- Calculis la probabilitat d'obtenir un 5.
- Calculis la probabilitat d'obtenir un resultat menor o igual a 5.
- Representis gràficament les funcions de densitat i distribució de probabilitat.

Enunciat 16.4

La variable aleatòria X recull el temps d’espera, en minuts, d’un tren de mitja distància que surt regularment cada hora en punt. Calculis:

- La probabilitat d’haver d’esperar més de 40 minuts.
- La probabilitat d’haver d’esperar entre 25 i 30 minuts.

17. Distribució Exponencial

Enunciat 17.1

La velocitat del vent a la base Rúskaya, situada en la costa occidental de l'Antàrtida es pot modelar, en m/s com una variable aleatòria contínua de funció de densitat

$$f(x) = \frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}x}, \text{ si } x > 0$$

Un anemòmetre situat a la base pot resistir fins a velocitats del vent de 35 m/s.

Calculis

- Quin tipus de distribució segueix la variable aleatòria velocitat? Quina és la velocitat mitjana del vent a la base Rúskaya?
- Quina probabilitat té l'anemòmetre de trencar-se?
- Quina és la probabilitat de que l'anemòmetre es trenqui en un dia en el que la velocitat del vent ja hagi superat els 30 m/s?

Enunciat 17.2

Un determinat fenomen natural cíclic succeeix —per terme mitjà— cada 15 minuts i s'ajusta a una distribució exponencial. Quina és la probabilitat d'haver d'esperar-se més de 20 minuts per a observar-lo.

Enunciat 17.3

Donada una variable aleatòria X de distribució exponencial, amb $x > 0$ i $t > 0$, demostris que $P(X > t + x | X > t) = P(X > x)$ — propietat de *manca de memòria*—

Si X representa un temps d'espera, com s'interpreta aquesta propietat?

Enunciat 17.4

La probabilitat de que un detector de moviment funcioni correctament és el 90 %. El temps, en anys, que tarda en avariar-se un detector es pot modelar segons una distribució exponencial amb una mitjana de 2 anys. Calculis la probabilitat de que un detector funcioni correctament més de 3 anys.

Enunciat 17.5

Sigui la variable aleatòria T que recull els dies de vida d'un bacteri de l'espècie *Staphylococcus aureus*, amb $T \sim \mathcal{E}(0.003)$. Calculis l'esperança de vida del bacteri i la probabilitat de que visqui més de 360 dies.

18. Distribució de Cauchy, Normal i Lognormal

Enunciat 18.1

Simulis una distribució de Cauchy amb 10000 elements.

Enunciat 18.2

Simulis una mostra de 100000 elements amb una distribució normal de mitjana 0 i desviació típica 1.

Enunciat 18.3

El nivell de colesterol es modela segons una variable aleatòria amb distribució $X \sim \mathcal{N}(179.1 \text{ mg/dl}, 28.2 \text{ mg/dl})$.

- Calculis el percentatge de persones amb un nivell de colesterol inferior a 169 mg/dl.
- Quin és el nivell de colesterol mínim d'un pacient que està en el percentil 90?

Enunciat 18.4

Si X es una variable aleatòria de una distribució $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, trobis $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$

Enunciat 18.5

En una ciutat s'estima que la temperatura màxima en un mes determinat segueix una distribució normal, de mitjana 23 °C i desviació típica 5 °C . Calculis el nombre de dies del mes en que s'espera assolir màximes entre 21 °C i 27 °C.

Enunciat 18.6

Se sap que en una determinada població la variable X que recull el pes —en kg.— d'una persona segueix una distribució normal $X \sim \mathcal{N}(60, 10)$. Calculis la probabilitat de que la suma dels pesos de 30 persones —elegides a l'atzar— superi els 1900 kg.

Enunciat 18.7

La variable aleatòria X recull els resultats d'un examen, sobre 10 punts, amb $X \sim \mathcal{N}(7.5, 2)$. Si un alumne ha tret una qualificació superior a 7, calculis la probabilitat de que la seva qualificació sigui, en realitat, superior a 8.

Enunciat 18.8

La mitjana de la tensió arterial diastòlica, en una determinada població, s'estableix en 80 mmHg amb una desviació estàndard de 9 mmHg. Assumint que la tensió arterial diastòlica segueix una distribució normal, calculis la proporció de persones amb valors superiors a 89 mmHg.

Enunciat 18.9

La duració d'una bombeta segueix una distribució normal $\mathcal{N}(1000, 100)$ en hores. Es desitja adquirir una mostra de bombetes tal que la vida mitjana de la mostra estigui entre 950 i 1050 hores, amb una probabilitat del 95 %.

- Trobis la mida de la mostra.
- Trobis la mida de la mostra sense utilitzar la distribució de la duració d'una bombeta.

Enunciat 18.10

La variable aleatòria X recull els resultats d'un test de cultura general, sobre 130 punts, passat a un grup de persones d'una determinada població, amb $X \sim \mathcal{N}(65, 18)$.

Es vol classificar la població en tres grups: baixa cultura general (20 %), cultura general acceptable (65 %) i excel·lent cultura general (15 %).

Quina puntuació ha de marcar el límit entre un grup i altre?

Enunciat 18.11

Un metal·lúrgic ha realitzat quatre determinacions del punt de fusió del manganès, en graus centígrades: 1269, 1271, 1263 i 1265. Segons un manual, el punt de fusió és 1260 °C. Es pot acceptar el valor del manual o s'ha de pensar que el punt de fusió és més alt? (provis amb $\alpha = 0.05$ i $\alpha = 0.01$).

Enunciat 18.12

La variable aleatòria X recull els resultats d'un test d'intel·ligència, amb $X \sim \mathcal{N}(100, 15)$.

Calculis:

- El percentatge de la població amb un coeficient entre 100 i 110.
- L'interval que, centrat en 100, conté el 50 % de la població.
- A Barcelona, amb una població de 1664182 habitants, quants individus s'espera que tinguin un coeficient superior a 135?

Enunciat 18.13

S'està construint una estructura formada per peces cilíndriques. La longitud de les peces cilíndriques segueix una mateixa distribució amb mitjana 10 cm i desviació típica 2 cm. Unint 31 peces, quina és la probabilitat que l'estructura resultant sigui superior a 301 cm?

Enunciat 18.14

S'està construint una estructura formada per peces cilíndriques. La longitud de les peces cilíndriques segueix una mateixa distribució amb mitjana 10 cm i desviació típica 2 cm. Determinis el nombre mínim de peces que és necessari unir perquè la longitud de l'estructura total sigui superior a 300 cm, amb una probabilitat superior a 95.154%.

Enunciat 18.15

Sigui X la variable aleatòria que recull el nombre de famílies que tenen una mascota. Sabent que $\bar{X} = 1/3$.

Calculis la probabilitat de que de 90 famílies seleccionades a l'atzar, 40 tinguin una mascota.

Enunciat 18.16

D'una mostra de 900 persones, 450 són fumadores, i d'una altra mostra de 600 persones, 400 són fumadores. Procedeixen de la mateixa població ? —preneu $\alpha = 0.05$ —.

Enunciat 18.17

La variable aleatòria X segueix una distribució $X \sim \mathcal{N}(110, 10)$. Calculis:

- a. $P[X > 110]$
- b. $P[110 < X < 120]$
- c. $P[110 < X < 130]$
- d. $P[120 < X < 130]$
- e. $P[90 < X < 100]$
- f. $P[90 < X < 120]$
- g. $P[X < 100]$

Enunciat 18.18

Les qualificacions dels alumnes, en una determinada matèria, es distribueixen normalment amb una mitjana de 5.3 punts i una desviació típica de 1.3 punts.

- a. Si s'aprova la matèria a partir d'una nota de 5.5 punts, calculis el percentatge d'aprovat.
- b. Si es vol aprovar al 40 % dels alumnes, quina ha de ser la nota mínima exigida?
- c. Si s'atorga notable als estudiants amb nota entre 7.5 i 8.5, quin és el percentatge de notables?
- d. Quina és la màxima puntuació obtinguda pel 14 % dels alumnes amb menys nota?
- e. Entre quines puntuacions varien les qualificacions del 40 % dels alumnes amb notes en un interval centrat en la mitjana?

Enunciat 18.19

Es vol saber si existeixen diferències significatives entre el temps de coagulació utilitzant dos fàrmacs diferents. Es fixen $\alpha = 0.05$ i $\beta = 0.10$ i es desitja un resultat que demostrï que la diferència de les mitjanes del temps de coagulació per a les dues mostres examinades sigui al menys de 0.5 minuts. La variància de la població ha estat estimada prèviament a $\sigma^2 = 0.52$. Quina hauria de ser la mida de les mostres?

Enunciat 18.20

Calculis $P(X < 27)$ per a $X \sim \mathcal{N}(28, 1)$.

Enunciat 18.21

Calculis la mida de la mostra per a $\delta = 1.1$ $\alpha = 0.05_{bilateral}$ $\sigma^2 = 3.0$ $\beta = 0.10$.

Enunciat 18.22

En una mostra de 900 persones de cabell fosc es va trobar que 150 tenien els ulls blaus. Construir un interval de confiança al 95% per a la proporció d'individu que tenint el cabell fosc tenen els ulls blaus. Són compatibles aquests resultats amb una hipotètica suposició de que la proporció teòrica és 1/4?

Enunciat 18.23

Calculis a tal que $P(X < a) = 0.1587$ en una variable aleatòria normal $X \sim \mathcal{N}(28, 1)$.

Enunciat 18.24

Es desitja calcular, amb el valor més aproximat possible, quina serà la velocitat mitjana d'enlairament d'un coet. Es llancen quatre coets i es mesura la seva velocitat d'enlairament, resultant ser: 19600, 20300, 20500, 19800 km/h respectivament. Suposant una distribució normal de la velocitat, quina seria la velocitat mitjana d'enlairament amb un risc $p < 0.05$?

Enunciat 18.25

Calculis la probabilitat de que la resistència a la compressió simple X , d'una cubeta de formigó sigui major que 100 Kg/cm², sabent que la resistència segueix una distribució $X \sim \mathcal{N}(200, 40)$ en Kg/cm².

Enunciat 18.26

Calculis $P(28$

Enunciat 18.27

Una mostra de cinc llaunes de conserva, de les quals s'afirma que tenen un pes mitjà de 1000 g, donen els pesos següents: 995, 992, 1005, 998 i 1000 g respectivament. Es pot mantenir la hipòtesi inicial de que $m=1000$ g, amb un nivell de significació $\alpha=0.05$? Suposis normalitat i trobis també un interval de confiança al 95 % per a m .

Enunciat 18.28

El contingut d'una llauna de beguda es distribueix normalment amb una mitjana de 30 cl i desviació típica $\sigma = 2$ cl.

- Quina és la probabilitat de que una llauna determinada tingui més de 33 cl?
- En un conjunt de 6 llaunes, quina és la probabilitat de que el contingut total de beguda sigui inferior a un litre i tres quarts?

Enunciat 18.29

Per tal d'estimar la proporció d'habitants d'una ciutat que posseeixen ordinador personal es pren una mostra de mida n . Calculeu el valor mínim de n per a garantir, amb un nivell de confiança del 95 %, que l'error d'estimació no supera el 2 %. —Com es desconeix la proporció, s'haurà de partir del cas més desfavorable, que serà 0,5—.

Enunciat 18.30

Dins una determinada població, el nivell normal de glucosa en sang en dejú, es distribueix aproximadament de manera normal, entre 70 i 110 mg/dL, amb una desviació estàndard de 9 mg/dL.

- Quina és la proporció de persones que presenten nivells compresos entre 90 i 125 mg de glucosa per cada dL de sang?
- Quin nivell intercepta al 10 % inferior dels valors?
- Quins nivells comprenen al 95 % dels valors?

Enunciat 18.31

Segons les dades de l'Institut Nacional d'Estadística d'Espanya, l'any 1999, el 3.4 % de la població masculina superava els 180 cm d'alçada i el 2.3 % mesurava menys de 160 cm. Dins la població femenina els percentatges eren, respectivament, 1.68 % i 14.18 %. Suposant que l'alçada es distribueix normalment, calculeu la mitjana i la desviació típica de l'alçada de la població espanyola, l'any 1999.

Enunciat 18.32

En un assaig clínic sobre 6595 homes, entre 45 i 64 anys, sense infart de miocardi, es constata un colesterol total basal de 272 ± 23 mg/dL.

El 2.5 % dels pacients del grup té valors inferiors a 250 mg/100 dL i el 2.5 % dels pacients del grup té valors superiors a 294 mg/100 dL.

Calculeu la probabilitat de trobar pacients amb nivells de colesterol compresos entre 240 i 280 mg/100 dL?

Enunciat 18.33

D'una població de bigues de ferro se n'ha extret una mostra de 64 i calculat la seva mitjana respecte la resistència a la fractura que és de 1012 KN/cm^2 . Se sap que la desviació estàndard o típica de la població és $\sigma = 25$. Trobeu els límits de confiança de la mitjana de la població, amb $\alpha = 0.05$.

Enunciat 18.34

Sigui X una variable aleatòria normal de mitjana 20 i variància 9.

Calculeu:

- $P(X \leq 22)$
- $P(9 < X \leq 21)$
- a , tal que $P(X \leq a) = 0.30$

Enunciat 18.35

Una mostra de set malalts d'un hospital ens indica les hores que dormen set dels malalts: 7, 5, 8, 8.5, 6, 7 i 8 h respectivament. Es sotmet als malalts a una droga per a dormir i s'extreu una mostra de cinc dels malalts, resultant-ne: 9, 8.5, 9.5, 10 i 8 h de soni. Es pot admetre que la droga és efectiva per dormir més ? —Suposis normalitat i un nivell de significació $\alpha = 0.05$ —.

Enunciat 18.36

Es llança 100 cops una moneda, amb cara i creu.

Calculis:

- La probabilitat de que el nombre de cares sigui comprés entre 49 i 51.
- L'interval $[a, b]$ centrat en 50, que verifiqui que $P([a, b]) = 80\%$.

Enunciat 18.37

Per tal d'estudiar la longitud mitjana de les extremitats inferiors, en cm, d'una determinada població sota estudi, s'ha extret una mostra de 400 mesures, obtenint els valors de $\bar{X} = 86$ i $s = 10.2$ per la mitjana i la desviació típica de la mostra. Quin serà l'interval de confiança de la mitjana de la població, amb un nivell de confiança del 95 % ?

Enunciat 18.38

Sigui X una variable aleatòria amb distribució normal, que verifica:

$$P(X \leq 15) = 0.1586553 \text{ i } P(X \leq 20) = 0.9331928$$

Calculis:

- $P(X \leq 12)$
- $P(16 \leq X \leq 18)$
- x tal que $P(X \leq x) = 0.05$
- y tal que $P(X > y) = 0.5$

Enunciat 18.39

Una mostra de mida 16 d'un cert tipus de transistor ha presentat una vida mitjana de 735 hores. Podem acceptar que la vida mitjana poblacional és de 750 hores, amb un nivell de significació $\alpha=0.05$? (es suposa normalitat, amb $\sigma = 12$ hores).

Enunciat 18.40

Calculis la probabilitat de que, entre 10000 xifres, la xifra 5 sigui seleccionada, a l'atzar, menys d'un 10 %.

Enunciat 18.41

D'una mostra X de mida 18 d'una població normal, s'ha obtingut la següent mitjana i variància mostral: $\bar{X} = 26.82$ i $s^2 = 61.33$.

- Trobis un interval de confiança al 99 % per a la mitjana poblacional.
- Es pot admetre que la variància poblacional és $s^2 = 50$? (prenguis $\alpha = 0.04$).

Enunciat 18.42

La següent taula proporciona dades sobre la precipitació total registrada en 11 estacions meteorològiques de dues poblacions, A i B . Suposant independència i normalitat. Calculis un interval de confiança amb una significació del 80% per al quocient de variàncies a les dues poblacions. Es pot assumir que les variàncies són iguals ?

Població A	100	89	84	120	130	105	60	70	90	108	130
Població B	120	115	96	115	140	120	75	90	108	130	135

Enunciat 18.43

El coeficient d'intel·ligència (ci) es una variable aleatòria que es distribueix segons una $N(100,15)$.

Calculis:

- La probabilitat de que un individu seleccionat al atzar tingui un ci inferior a 110.
- La probabilitat de que un individu seleccionat al atzar tingui un ci entre 110 i 120.
- Si es suposa que una persona amb estudis universitaris ha de tenir un ci superior a 110, la probabilitat de que un graduat universitari tingui un ci superior a 120.

Enunciat 18.44

Es realitza un estudi sobre 115 individus adults, 60 dones i 55 homes, entre 18 i 35 anys. Es mesuren els diàmetres cefàlics i es determina l'Índex Cefàlic Horitzontal (ICH), relacionant el diàmetre cefàlic transvers màxim i el diàmetre cefàlic anteroposterior màxim. Obtenint-se els resultats següents:

ICH	n	%
[61.21, 71.28] - Hiperdolicocèfal	5	4.4
[71.28, 76.44] - Dolicocèfal	41	35.7
[76.44, 81.28] - Mesocèfal	44	38.3
[81.28, 85.75] - Braquicèfal	17	14.7
[85.75, 90.00] - Hiperbraquicèfal	6	5.2
[90.00, 92.73] - Ultrabraquicèfal	2	1.7
	115	100.0

Calculis la mitjana i la desviació típica de la distribució.

Enunciat 18.45

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ són variables aleatòries normals $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, independents, trobis la distribució de la nova variable: $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

Enunciat 18.46

En una mostra de 9 preparats de suc de tomàquet s'ha obtingut una mitjana de vitamina C de 21 mg/100 cc amb una desviació mostral de 2.45 mg/100 cc. Suposant que el contingut de vitamina C del suc de tomàquet es distribueix segons una distribució normal de variància desconeguda:

- Estimis el contingut mitjà de vitamina C del suc de tomàquet.
- Calculis l'interval de confiança al 98 %.

Enunciat 18.47

Trobis un interval de confiança per a la mitjana d'una població normal de variància coneguda, amb un coeficient de confiança de 0.95, a partir d'una mostra $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Enunciat 18.48

L'alçada mitjana d'una mostra de 1000 persones d'una determinada població és de 168.0 cm, mentre que deu anys després una mostra de 1200 persones de la mateixa població va ser de 169.2 cm. Suposant normalitat amb $\sigma = 8$ cm:

- Trobis un interval de confiança al 95 % per a la diferència de mitjanes poblacionals.
- Es pot acceptar, amb $\alpha = 0.05$, que l'alçada mitjana de la població ha augmentat?

Enunciat 18.49

Una balança de laboratori té una precisió tal que els errors aleatoris que es produeixen a les pesades segueixen una distribució $\mathcal{N}(0, 0.1)$ en miligrams.

- Calculis l'error màxim d'una pesada amb probabilitat 0.95.
- Calculis l'error màxim de la mitjana de 10 pesades amb probabilitat 0.95.
- Calculis el nombre mínim de pesades per assegurar que l'error màxim de la mitjana és inferior a 0.01 mg amb probabilitat 0.95.

Enunciat 18.50

La mitjana (m) d'una variable aleatòria X , normal, és 10 vegades la seva desviació típica (σ). A més es verifica que $P(X \leq 18) = 0.1586553$.

Calculis:

- m i σ .
- L'esperança i la funció de distribució de la nova variable $Y = 80 - X^2$.

Enunciat 18.51

Es llança 100 cops una moneda. Determinar un nombre k tal que el nombre de cares sigui comprès entre 49 i k , amb probabilitat 0.5.

Enunciat 18.52

Una variable aleatòria X normal verifica: $P(X \leq 8) \approx 0.93$ i $P(X \leq 4) \approx 0.31$. Calculeu la mitjana, la desviació típica i $P(2 < X < 6)$.

Enunciat 18.53

Els errors aleatoris que resulten de les pesades d'una balança segueixen una distribució $\mathcal{N}(0, 0.5)$ en mg.

- Calculeu l'error màxim d'una pesada amb probabilitat 0.95.
- Calculeu el nombre mínim de pesades per assegurar que l'error màxim de la mitjana és inferior a 0.01 mg amb probabilitat 0.95.

Enunciat 18.54

Es llança un dau 100 cops. Sigui X la variable aleatòria igual a la suma dels punts obtinguts en cada tirada.

- Calculeu la probabilitat d'obtenir més de 370 punts.
- Sabent que a la tirada 50 s'ha arribat a 180, calculeu la probabilitat de que en la tirada 100 no es passi de 340 punts.

Enunciat 18.55

Les alçades dels homes d'una població segueixen una distribució normal de $m = 170$ cm i una $\sigma = 7$ cm i la de les dones altra distribució normal de $m = 160$ cm i una $\sigma = 6$ cm. S'escullen un home i una dona a l'atzar. Quina és la probabilitat que l'home sigui més alt que la dona?

Enunciat 18.56

Una peça és defectuosa amb probabilitat 0.06. Trobar la probabilitat de que en una mostra de 100 peces al atzar, 8 siguin defectuoses, utilitzant l'aproximació a la distribució normal.

Enunciat 18.57

En un procés de fabricació se sap que el nombre aleatori d'unitats defectuoses produïdes diàriament, ve donat per la llei de probabilitat de Poisson $\mathcal{P}(10)$. Determineu la probabilitat de que en 150 dies, el nombre d'unitats defectuoses produïdes superi 1480 unitats.

Enunciat 18.58

El pes exacte de la carn empaquetada és difícil de determinar per la pèrdua de pes per l'evaporació de líquids, definit com a percentatge del pes original, durant el procés d'empaquetat. Es suposen, al respecte, uns paquets de carn de pollastre comercialitzats segons una distribució normal de mitjana 4% i desviació típica 1%.

En una mostra aleatòria de 4 paquets, calculeu la probabilitat de que tots ells tinguin pèrdues de pes entre el 3 i el 5 %.

Enunciat 18.59

Es suposa un concessionari de venda d'automòbils, amb X_1, X_2 i X_3 variables aleatòries independents que representen el volum setmanal de vendes per a tres models diferents d'automòbil amb $X_1 \sim \mathcal{N}(42, 12)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(60, 18)$ i $X_3 \sim \mathcal{N}(78, 10)$, en milers d'euros.

Calculis:

- La probabilitat de que les vendes del primer model no superin els 30 mil euros en una setmana.
- La probabilitat de que les vendes del segon model superin en una setmana la mitjana del tercer model.
- La probabilitat de que en una setmana les vendes del concessionari siguin superiors a 120 mil euros.
- La probabilitat de que la suma de les vendes del primer i del tercer models superin les vendes del segon model en 18 mil euros, en una setmana.

Enunciat 18.60

Les qualificacions, de 0 a 100, obtingudes per uns estudiants en dues proves diferents A i B , són independents i segueixen les distribucions normals: $A \sim \mathcal{N}(62, 20)$ i $B \sim \mathcal{N}(52, 10)$ respectivament. La prova es considera superada amb 50 punts.

Calculis:

- La probabilitat de que un alumne, a la prova A , hagi obtingut una puntuació menor que 40.
- La probabilitat de que una alumne determinat hagi superat la prova B .
- Si un alumne ha obtingut una puntuació de 68 en la primera prova i de 62,5 en la segona. En quina prova ha obtingut millor resultat respecte els altres alumnes?
- Sigui M la variable definida per $M = 0.5 \cdot (X + Y)$, on X, Y representen les variables aleatòries anteriors. Calculis la mitjana i la desviació típica.
- Si es precisa que la mitjana aritmètica de les dues proves sigui superior a 70, calculis la probabilitat de superar-ho.

Enunciat 18.61

Un zoòleg ha mesurat el pes d'una mostra de 12 crancs de l'espècie *Pachygrapsus crassipes* i ha anotat els valors següents: 14.40, 15.20, 11.30, 2.50, 22.70, 14.90, 1.41, 15.81, 4.19, 15.39, 17.25 i 9.52. Desitja saber, amb $\alpha = 0.01$, si es pot acceptar que el pes es distribueix normalment.

Enunciat 18.62

Es vol investigar una mostra de 895 alumnes d'un centre escolar. Per fer-ho es recull la nota mitjana d'una determinada matèria, expressada de 0 a 10, en els següents intervals de classe:

Interval	nota		freqüència
	del	al	
1	0	1	20
2	1	2	40
3	2	3	60
4	3	4	140
5	4	5	150
6	5	6	225
7	6	7	145
8	7	8	50
9	8	9	50
10	9	10	15

Determinis si les dades concorden amb la hipòtesi de que la variable aleatòria X = “nota acadèmica” es distribueix normalment.

Enunciat 18.63

S'han fet unes proves neurofisiològiques, consistents en mesurar la resposta a un estímul lluminós, a una mostra de 155 individus. S'ha calculat la diferència màxima de la distribució acumulativa mostral del temps mitjà que ha tardat cada individu respecte la distribució teòrica, suposant normalitat, resultant ser de 0.081. És vàlida la hipòtesi de normalitat al nivell $\alpha=0.05$? I amb $\alpha=0.01$?

Enunciat 18.64

La variable aleatòria Y recull el valor de la renda anual en €. Es vol saber la proporció de la renda per sobre de 40000 € anuals per a un determinat sector econòmic amb distribució salarial —en milers d'euros— segons un model $Y \sim \mathcal{LN}(2, 1.2)$.

Enunciat 18.65

La supervivència, en anys —després d'una determinada intervenció quirúrgica, en una població determinada— segueix una distribució lognormal de paràmetres d'escala $\mu = 2.32$ i forma $\sigma = 0.20$.

- Calculis la probabilitat de sobreviure més de 12 anys.
- Representis la funció de distribució acumulada de la variable.

19. Distribució normal bivariada

Enunciat 19.1

Les variables aleatòries Y_1, Y_2 són independents amb distribució $\mathcal{N}(0, 1)$. Donades les variables aleatòries X, Y , amb

$$X = 2 + Y_1 + Y_2$$

$$Y = 3 + Y_1 + 2Y_2$$

- Trobis la funció de densitat bivariant de (X, Y) .
- Cóm es distribueix la variable $Z = 2X + 3Y - 1$?

Enunciat 19.2

Es desitja comparar dues noves línies de blat, A i B . Es prenen 10 parcel·les al atzar, plantant blat a cadascuna d'elles en dues parcel·les diferents. La producció a les 10 parcel·les, en HL/Ha, va ésser la següent:

A	57	49	60	55	57	48	50	61	52	56
B	55	48	58	56	54	48	52	56	50	58

Es pot admetre que la producció és la mateixa? Es suposa distribució normal bivariant, i un nivell de significació $\alpha = 0.05$.

Enunciat 19.3

K. Pearson (1857-1936) va recopilar l'any 1903 l'alçada de 1708 parelles formades per un pare i el seu fill [*]. Concretament va estudiar la relació entre l'alçada del pare (X) i la del seu fill (Y). En el seu estudi, Pearson, va observar que les variables X, Y s'ajustaven bé a una normal bivariant de paràmetres (en cm):

$$m_1 = 171.93 \quad \sigma_1 = 6.97 \quad m_2 = 174.46 \quad \sigma_2 = 7.15 \quad \rho = 0.5013383$$

[*] [Dades de Pearson](#)

Calculis

- L'alçada esperada d'un fill que el pare mesura 185 cm. Quina és la desviació esperada de la mesura del fill per cada centímetre de desviació del pare?
- Si s'escull una família al atzar, la probabilitat de que l'alçada del fill superi en 3 cm la del pare.
- La probabilitat de que l'alçada del fill superi els 175 cm.
- La probabilitat de que l'alçada del fill superi els 190 cm sabent que el pare mesura 185 cm.

Enunciat 19.4

Les variables aleatòries X, Y tenen una distribució de conjunt absolutament contínua, amb funció de densitat

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} e^{(1/2)(x^2+y^2)} & , \text{ si } x > 0 \text{ i } y \leq 0 \\ 0 & , \text{ en altre cas} \end{cases}$$

Demostris:

- que la distribució marginal de X i de Y segueixen una distribució $\mathcal{N}(0, 1)$;
- que X, Y són variables independents.

La distribució conjunta de X, Y és normal bivariant? Què es dedueix d'aquestes condicions?

Enunciat 19.5

La variable aleatòria X segueix una distribució *khi*-quadrat amb m g.l., i la variable aleatòria Y segueix una distribució *t*-Student amb n graus de llibertat. Calculeu els valors de x, y tals que:

- $P(X \leq x) = 0.99$, amb $m = 12$ i $P(X > x) = 0.1$, amb $m = 42$
- $P(Y \leq y) = 0.6$, amb $n = 20$ i $P(|Y| > y) = 0.01$, amb $n = 45$

Enunciat 19.6

Es pretén provar la precisió de cinc termòmetres. Es suposa que mesuren la temperatura amb un cert error aleatori que segueix una distribució $\mathcal{N}(0, \sigma)$, amb σ desconegut. Exactament a 0°C s'obtenen les següents mesures de cinc termòmetres diferents, en $^\circ \text{C}$:

- Termòmetre 1: 0.02
- Termòmetre 2: 0.05
- Termòmetre 3: -0.01
- Termòmetre 4: -0.04
- Termòmetre 5: 0.12

És correcte suposar que el termòmetre número 5 no mesura correctament la temperatura? I si es sabés que $\sigma = 0.05^\circ \text{C}$?

Enunciat 19.7

La distribució conjunta de les variables aleatòries X, Y és normal bivariada. Demostris que X i Y poden expressar-se com a combinació lineal de dues variables aleatòries U, V amb distribució normal reduïda i independents.

Enunciat 19.8

Les variables aleatòries X, Y són $\mathcal{N}(0, 1)$ amb distribució de conjunt normal bivariada, amb $\rho = 1/2$.

- Quina és la distribució de la variable aleatòria $Z = 2X - 7Y + 8$?
- Calculeu la probabilitat $P(2Y > X + 2)$

20. Distribució khi-quadrat

Enunciat 20.1

Suposis la distribució d'alumnes d'un grup classe. Distribuït per gènere, amb 33 homes i 31 dones. Ens interessa la freqüència de la classe o categoria de les dades, en aquest cas, el gènere (home/dona).

Enunciat 20.2

La variable aleatòria U segueix una distribució χ^2 amb m g.l., mentre que la variable aleatòria V segueix una distribució t -Student amb n g.l.

- Trobis a tal que $P(U > a) = 0,01$, amb $m = 15$ i amb $m = 65$.
- Trobis b tal que $P(|V| > b) = 0,01$, amb $n = 10$ i amb $n = 45$.

Enunciat 20.3

En dues poblacions A i B la probabilitat de que un recent nascut sigui nen és 0.5. De 600 naixements en A i 800 naixements en B s'han observat les següents freqüències:

	nens	nenes
A	290	310
B	410	390

Enunciat 20.4

Es realitza un estudi sobre un grup de persones de las que se'ls anota el nombre de Km en una caminada, el sexe i si fan o no esport. Per fer aquest estudi es pren una mostra de 55 persones. Calculis un interval de confiança al 92 % per a la diferència entre la proporció d'homes i de dones que practiquen esport. Poden considerar-se iguals ambdues que proporcions?

Es disposa de les següents dades ($n=55$):

km = 10, 21, 13, 3, 11, 26, 10, 3, 5, 8, 6, 28, 16, 12, 14, 10, 10, 4, 12, 18, 13, 11, 21, 22, 16, 12, 6, 14, 13, 9, 7, 11, 18, 10, 11, 9, 7, 12, 15, 14, 26, 18, 10, 53, 52, 50, 52, 48, 46, 53, 50, 35, 50, 60, 50.

sexe = 'H', 'H', 'D', 'D', 'H', 'H', 'H', 'D', 'D', 'D', 'D', 'D', 'H', 'D', 'D', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'D', 'D', 'D', 'D', 'D', 'D', 'H', 'H', 'D', 'H', 'D', 'D', 'H', 'D', 'H', 'D', 'H', 'H', 'D', 'D', 'H', 'D', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'H', 'D', 'H', 'H'.

esport = 'NO', 'NO', 'SI', 'NO', 'NO', 'NO', 'NO', 'SI', 'SI', 'NO', 'SI', 'SI', 'NO', 'SI', 'NO', 'SI', 'NO', 'NO', 'SI', 'NO', 'SI', 'SI', 'NO', 'NO', 'NO', 'NO', 'SI', 'NO', 'SI', 'SI', 'NO', 'NO', 'NO', 'NO', 'SI', 'NO', 'NO', 'NO', 'NO', 'NO', 'SI', 'SI', 'NO', 'NO', 'NO', 'SI', 'SI', 'NO', 'NO'.

Enunciat 20.5

Trobis el valor de la variable aleatòria χ^2 amb $n = 13$ g.l. que deixi a l'esquerra sota la funció de densitat una àrea de 0.05

Enunciat 20.6

La variable aleatòria X segueix una distribució χ^2 amb m g.l.. La variable aleatòria Y segueix una distribució t d'Student amb n g.l.

Calculis els valors x , y tals que:

- $P(X \leq x) = 0.99$, amb $m = 12$ i $P(X > x) = 0.1$, amb $m = 42$.
- $P(Y \leq y) = 0.6$, amb $n = 20$ i $P(|Y| > y) = 0.01$, amb $n = 45$.

Enunciat 20.7

A dues poblacions, A i B , $P(\text{mascle}) = P(\text{femella}) = 0.5$. De 1000 naixements a la població A i 1200 naixements a la població B , s'han observat les següents freqüències:

	A	B
mascles	487	620
femelles	513	580

Es demana:

- Quines serien les freqüències teòriques?
- La probabilitat de que les freqüències teòriques observades siguin encara més disperses que les que s'han observat.

Enunciat 20.8

Després de llançar un dau 300 cops, s'han observat les següents freqüències:

Cara	1	2	3	4	5	6
Freqüència	43	49	56	45	66	41

Segons aquests resultats, es pot rebutjar la hipòtesi de que el dau és ben construït? Prenguis el nivell 0.05 de significació.

Enunciat 20.9

De 64 descendents d'un creuament entre conills d'índies, 34 són vermells, 10 negres i 20 blancs. Segons un model proporcionat per la genètica, aquests nombres haurien d'estar en la proporció 9:3:4. Són d'acord les freqüències obtingudes amb el model teòric, al nivell $\alpha = 0.05$?

Enunciat 20.10

Es classifiquen 1000 individus d'una població segons el seu sexe i ser daltònics o no, obtenint-se els següents resultats:

	home	dona
vista normal	442	514
daltònic	38	16

Segons un determinat model genètic, les probabilitats haurien d'haver estat les següents:

	home	dona
vista normal	$0.5 \times p$	$0.5 \times p^2 + p \times q$
daltònic	$0.5 \times p$	$0.5 \times q^2$

On $q = 1 - p$ representa la proporció de gens del daltonisme a la població.

Concorden els resultats obtinguts amb el model teòric al nivell $\alpha = 0.05$?

Enunciat 20.11

Un psicòleg vol conèixer la relació entre el símptoma psicòtic: "deteriorament psicogènic del pensament o memòria" amb el símptoma neuròtic: "depressió". Per fer-ho disposa d'una mostra de 100 historials de persones amb símptomes clínics, obtenint les següents freqüències:

		<i>deteriorament psicogènic</i>		
		<i>SÍ</i>	<i>NO</i>	
<i>depressió</i>	<i>SÍ</i>	38	31	69
	<i>NO</i>	9	22	31
		47	53	

Consideris si, amb $\alpha = 0.02$, els símptomes són o no independents, segons els resultats obtinguts.

Enunciat 20.12

Es classifiquen 1725 alumnes segons l'historial acadèmic i el nivell socioeconòmic familiar aparent i s'obtenen els resultats següents:

		<i>expedient acadèmic</i>			
		baix	mitjà	alt	
<i>nivell socioeconòmic</i>	alt	81	322	233	636
	mig	141	457	153	751
	baix	127	163	48	338
		349	942	434	1725

Consideris si, amb $\alpha = 0.001$, els dos paràmetres considerat són o no independents, segons els resultats obtinguts.

Enunciat 20.13

Dos investigadors prenen mostres d'una mateixa ciutat amb objecte de calcular el nombre de persones que corresponen als grups de rendes pobre, classe mitjana i classe acomodada.

Els límits dels grups s'expressen monetàriament i són els mateixos pels dos investigadors.

S'obtenen els resultats següents:

		renda			
		baixa	mitjana	alta	
investigador	A	140	100	15	255
	B	140	50	20	210
		280	150	35	465

Demostri que, amb $\alpha = 0.01$, algun dels dos investigadors ha pres incorrectament les dades.

Enunciat 20.14

Un fisiòleg vegetal obté dues sèries (A i B) de 382 i 1020 freqüències, respectivament, del fong *Spilocaea oleagina* i les classifica en 41 classes segons la seva longitud en μm :

Longitud	freqA	freqB	Longitud	freqA	freqB
5	1	3	26	15	23
6	10	4	27	13	23
7	5	7	28	11	32
8	8	9	29	20	20
9	10	3	30	23	31
10	3	8	31	25	44
11	7	5	32	12	17
12	4	10	33	15	51
13	7	26	34	17	28
14	15	20	35	13	38
15	10	30	36	17	46
16	7	68	37	7	21
17	17	29	38	2	18
18	11	22	39	4	35
19	7	72	40	0	14
20	8	29	41	5	10
21	14	24	42	0	24
22	10	44	43	1	3
23	10	44	44	0	3
24	8	35	45	0	6
25	10	41			

Es vol saber, amb $\alpha = 0.01$, si es poden agrupar les dues sèries en una de sola, es a dir, si les dues mostres poden considerar-se d'una mateixa població.

Enunciat 20.15

Les longituds de 150 cargols, produïts per un torn, s'han classificat en 5 grups segons la taula següent:

Longitud	Freqüència
$10.01 \leq L < 10.06$	26
$10.06 \leq L < 10.11$	32
$10.11 \leq L < 10.16$	35
$10.21 \leq L < 10.26$	29
$10.26 \leq L \leq 10.31$	28

Sabent que la mínima longitud que pot fer el torn és 10.01 mm, i la màxima és 10.31, comprovem si la variable aleatòria "longitud d'un cargol" es distribueix uniformement.

Enunciat 20.16

La taula següent mostra el nombre de fumadors i de no fumadors entre dues mostres d'homes i dones i es desitja saber si hi ha alguna relació entre els dos atributs, prenguis $\alpha = 0.05$.

	Fumadors	No fumadors	Totals
Homes	21	33	54
Dones	15	31	46
Totals	36	64	100

21. Distribució F de Fisher-Snedecor

Enunciat 21.1

Trobis el valor de $F_{0,05}$ tal que $P(F > F_{0,05}) = 0,05$ per a la distribució F de Fisher-Snedecor amb m i n g.l. en els casos:

- $m = 4, n = 12$
- $m = 8, n = 25$
- Trobis també un a tal que $P(F < a) = 0,05$ per a $m = 5, n = 10$.

Enunciat 21.2

La velocitat de les molècules d'un cert gas és $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, amb u, v, w variables aleatòries independents amb distribució $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Siguin A i B dues molècules del gas que es mouen independentment una de l'altra. Calculeu la probabilitat de que A es desplaci a una velocitat tres cops superior a la de B .

Enunciat 21.3

S'investiga un antibiòtic i es prenen 7 pacients amb febre, als quals se'ls subministra l'antibiòtic, i 6 pacients amb febre als quals se'ls subministra un placebo. Als tres dies es recullen els resultats que mostra la taula. Es demana si l'antibiòtic és o no eficaç (amb $\alpha = 0.05$).

	Sense febre	Amb febre	Totals
Amb antibiòtic	5	2	7
Amb placebo	3	3	6
Totals	8	5	13

22. Distribució t de Student

Enunciat 22.1

Es desitja comprovar l'efecte d'un fertilitzant sobre la producció dels arbres fruiters. Per fer-ho es seleccionen aleatòriament un grup de 10 arbres i es prenen les dades de la producció abans i després de tractar-los amb el fertilitzant. Obtinguis un interval de confiança al 99 % de confiança per a la diferència de mitjanes de la producció abans i després del tractament.

Abans	25	20	25	28	30	30	26	15	18	22
Després	30	25	28	29	30	31	24	22	25	27

Enunciat 22.2

Trobis el valor crític de t tal que l'àrea sota la cua dreta de la funció de densitat de la variable t de Student sigui 0.05, amb 16 g.l.

Enunciat 22.3

Un grup de dones amb infecció de gola presenta els següents valors de velocitat de sedimentació globular, en mm/hora: { 30, 12, 16, 25, 18, 15, 36, 9, 27, 14, 18, 23 }

Un altre grup d'homes, amb iguals característiques generals i infecció, presenta els valors següents: { 10, 12, 25, 22, 12, 14, 15, 20, 19, 7, 8, 17 }

Hi ha alguna diferència per raó de sexe, amb $\alpha = 0.01$?

Enunciat 22.4

Un fabricant de bàscules de laboratori verifica el calibratge de deu dels seus aparells. Les bàscules mesuren el pes amb un error aleatori que segueix una distribució $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$, on σ^2 és desconeguda. Amb la calibració de 1 mg n'ha obtingut les mesures següents:

Bàscula	1	2	3	4	5	6	7	8
Pes	1.01	1.03	1.02	0.90	1.01	1.0	1.02	1.04

El fabricant sospita que la bàscula 4 és mal calibrada. És aquesta una bona conclusió? I si sabés que $\sigma = 0.05$ mg?

Enunciat 22.5

La distribució de les variables aleatòries X_1, X_2, X_3 és $\mathcal{N}_3(m, C)$, sent

$$m = (4, 3, 5) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Expressis la funció de densitat de X_1, X_2, X_3 .
- Trobis la distribució conjunta de

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 + X_2 + X_3 \\ Z_2 = 2X_1 + X_2 + 2X_3 \end{cases}$$

Enunciat 22.6

S'han extret dues mostres de una base de dades de dones que han donat a llum un nadó. L'objectiu de les mostres és veure si hi ha diferències entre el pes del nadó, en kg, versus l'habitat de la mare, rural o urbà, amb un nivell de significació $\alpha = 0.05$.

Les dades del pes del nadó, segons l'habitat de la mare, són:

Urbà = {3.523, 2.727, 3.718, 4.351, 3.387, 2.522, 2.692, 4.426, 3.221, 3.698, 4.439, 3.800, 3.484, 2.674, 2.557, 4.105, 3.032, 2.772, 3.074, 4.075, 4.286, 3.680, 2.571, 2.822, 3.068, 3.329, 2.583, 4.412, 3.668, 4.028, 2.869, 3.348, 4.131, 2.946, 4.086, 3.850, 3.843, 4.343, 3.494, 2.907, 3.791, 3.651, 3.318, 2.663}

Rural = {3.114, 2.711, 3.942, 4.386, 4.016, 2.820, 3.360, 3.526, 2.911, 3.013, 2.662, 3.370, 3.739, 2.987, 3.490, 2.644, 4.269, 4.040, 4.060, 3.342, 2.693, 3.804, 3.279, 4.215, 3.766, 4.217, 3.451, 2.678, 2.817, 3.366, 4.314, 3.036, 3.193, 3.469, 3.280, 3.228, 4.308, 3.655, 3.334, 3.636, 2.702, 3.956, 2.917, 4.339, 3.541, 3.382, 3.853, 2.984, 2.756, 2.508, 3.031, 4.263, 2.808, 4.236, 4.182, 2.883}

Enunciat 22.7

A 13 pacients amb apnea se'ls subministra un medicament . Es recull el nombre mitjà d'apnees per hora, 24 hores abans de l'administració i 16 hores després de l'administració del medicament. Es vol saber si aquest medicament és o no eficaç per disminuir el nombre d'episodis d'apnea.

Les dades es recullen a la següent taula:

abans	1.71	1.25	2.13	1.29	1.58	4.00	1.42	1.08	1.83	0.67	1.13	2.71	1.96
després	0.13	0.88	1.38	0.13	1.25	2.63	1.38	0.50	1.25	0.75	0.00	2.38	1.13

23. Regressió i correlació lineal en dues variables

Enunciat 23.1

Les notes obtingudes per 10 alumnes en dos examens són les següents:

Examen 1 = $\{ 5, 6, 8, 4, 5, 8, 6, 9, 9, 10 \}$

Examen 2 = $\{ 5, 6.5, 7, 3.5, 6, 7, 7.5, 9.5, 9, 10 \}$

Es demana calcular:

- La covariància, correlació i rectes de regressió.
- La nota esperada en el primer examen en un alumne que ha tret un 6 en el segon.
- L'error típic comés a l'estimació anterior.

Enunciat 23.2

En una població, les alçades de pares i fills segueixen una distribució $\mathcal{N}(168, 12)$ en cm. La distribució conjunta de pares i fills és normal bivariant, amb correlació $\rho = 0.6$.

- Calculis el percentatge de pares més de 10 cm més alts que els seus fills.
- Demostri que els pares d'alçada superior a la mitjana, tindran fills més baixos que ells, però d'alçada superior a la mitjana.
- Demostri que els fills d'alçada superior a la mitjana, tendiran a tenir pares més baixos que ells, però d'alçada superior a la mitjana. És això contradictori?

Enunciat 23.3

Es llança un dau regular de sis cares.

Siguin

- X la variable aleatòria que recull el nombre de punts obtinguts
- Y la variable aleatòria amb valor 0 si $(X < 4)$ o 1 si $(X > 3)$

Calculis la covariància i la correlació entre X i Y .

Enunciat 23.4

Les rectes de regressió de dues variables aleatòries X, Y , són:

- $2x + y = 16$
- $x + y = 8$

Trobis els punts de tall, els coeficients de regressió i la correlació. Quina és la condició que han de verificar dues rectes qualsevol per a ser rectes de regressió?

Enunciat 23.5

En ecologia, s'utilitza el mostreig d'àrees contigües per a comptar el nombre d'espècies diferents de plantes per unitat d'àrea. En aquest tipus de mostreig, es comença per una àrea de 1 m^2 i cada següent àrea contigua té el doble d'extensió que l'anterior.

El model que relaciona les variables aleatòries:

- $S = \{ \text{Nombre d'espècies} \}$
- $A = \{ \text{Superfície en } \text{m}^2 \}$

és el model logarítmic: $S = b \cdot \ln A + a$, on a representa el nombre d'espècies per unitat d'àrea i b un índex de diversitat. Es demana:

- a. Calcular a , b i el coeficient de determinació R^2 per les dades següents:

A (superfície m^2)	1	2	4	8	16	32	64	128	256
S (nombre d'espècies)	6	7	9	10	12	13	14	16	17

	1	4
2		
8		

- b. Analitzar si també serien adequats els models:

- Exponencial, $S = a \cdot e^{bA}$
- Potencial, $S = a \cdot A^b$

Enunciat 23.6

Un estudi sobre 2000 persones recull el pes en kg —variable aleatòria X — i la Pressió Arterial Sistòlica (PAS) en mmHg —variable aleatòria Y —. Les dades registrades segueixen les següents distribucions normals:

	Pes (kg)	PAS (mmHg)
Homes	$X_H \sim N(80, 5)$	$Y_H \sim N(180, 10)$
Dones	$X_D \sim N(55, 5)$	$Y_D \sim N(150, 10)$

Al agrupar les dades, considerant una única població, es detecta una certa correlació entre el pes i la pressió arterial.

- a. Demostris que la correlació detectada, al considerar la població conjunta d'homes i dones, és una falsa correlació.
- b. Interpretis gràficament.

Enunciat 23.7

S'ha comptat el nombre d'ous posats per 50 femelles de *Drosophila melanogaster*, durant uns dies. També s'ha comptat el nombre d'ous posats per una filla de cadascuna de les 50 femelles durant els mateixos dies.

S'obtenen els següents resultats:

mares <- c(91, 37, 76, 65, 48, 24, 81, 51, 33, 47, 23, 71, 73, 53, 82, 71, 60, 70, 58, 38, 61, 93, 65, 98, 87, 72, 87, 74, 77, 84, 44, 67, 65, 84, 96, 34, 35, 73, 98, 79, 75, 59, 58, 46, 24, 56, 87, 88, 61, 28)

filles <- c(89, 46, 60, 63, 55, 37, 75, 49, 41, 52, 34, 87, 65, 45, 90, 63, 58, 63, 47, 25, 70, 85, 72, 80, 61, 65, 78, 68, 69, 94, 38, 74, 57, 72, 81, 29, 48, 75, 87, 73, 65, 50, 49, 65, 37, 43, 96, 65, 50, 32)

Calculis:

- La correlació entre la posta de filles i mares.
- El percentatge de variació de la posta de les filles que pot explicar-se per la variació de la posta de les mares.
- Si una filla ha posat 60 ous, quina és la predicció dels ous posats per la mare? Calculis l'error típic.

Enunciat 23.8

Segons la llei de Boyle-Mariotte dels gasos ideals, si una massa de gas varia el seu volum a temperatura constant, el producte de la pressió pel volum no varia: $P \cdot V = C$. Sent P , la pressió; V , el volum; i C , la constant característica de la naturalesa del gas.

Estimis la constant C , pel mètode dels mínims quadrats, per a un gas del que es disposa de les següents dades experimentals:

$P \text{ (Kp/cm}^2\text{)}$	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
$V \text{ (L)}$	1.81	0.91	0.59	0.44	0.34	0.31	0.26	0.24	0.19

Enunciat 23.9

S'ha mesurat el pes en kg (X) i el diàmetre de la cintura en cm (Y) de 24 dones entre 25 i 27 anys. Els resultats han estat els següents:

X	54.6	62.3	48.1	59.1	53.3	56.2	54.8	54.2	50.9	52.3	59.8	54.6
Y	71.5	70.0	69.4	73.4	68.6	69.5	72.9	74.8	63.3	69.7	73.6	68.7
X	48.9	55.4	58.6	49.6	55.4	58.2	57.7	57.5	56.4	57.0	53.6	59.4
Y	70.8	67.3	72.9	67.1	73.2	69.5	67.5	71.0	70.6	65.5	67.2	72.7

Calculis la raó de correlació de Y sobre X i estudiis l'al·lometria.

Enunciat 23.10

Es pretén analitzar la correlació entre la duració d'una determinada anestèsia i el despertar de la consciència com per a comptar cap enrere sense error a partir d'un nombre determinat. Es disposa de les dades següents —en minuts—:

$X = \{ \text{Duració anestèsia} \}$	150	127	160	210	250	130	60	55
$Y = \{ \text{Duració despertar} \}$	13	16	21	20	16	13	12	14

Es pretén contrastar les hipòtesis: H_0 : { La duració del despertar no és influïda per la duració de l'anestèsia } i H_1 : { La duració del despertar sí que és influïda per la duració de l'anestèsia }

Enunciat 23.11

Es vol determinar si les notes de les assignatures següents són relacionades, utilitzant els diferents estadístics de Pearson, Spearman i Kendall.

Física	6.00	6.50	7.50	8.50	9.25	8.75
Química	8.00	6.25	6.75	7.75	8.75	9.25

Es pretén contrastar les hipòtesis: H_0 : { Les notes de les dues assignatures no són relacionades } i H_1 : { Les notes de les dues assignatures són relacionades }

Enunciat 23.12

Es pretén estudiar la possible relació entre les variables: color de la pell i color del cabell. Es disposa d'una mostra de 100 individus amb els resultats següents:

PELL / CABELL	Negre	Castany	Ros	TOTAL
Fosca	25	25	10	60
Clara	10	15	15	40
TOTAL	35	40	25	100

24. Regressió i correlació múltiple

Enunciat 24.1

El dataset Boston del paquet MASS recull dades de 506 àrees residencials de Boston. Entre elles:

- $X_1 = tax$ = La taxa d'impost a la propietat en unitats de 10000 \$.
- $X_2 = rad$ = L'índex d'accessibilitat a les autopistes radials.
- $X_3 = black = 1000(Bk - 0.63)^2$ on Bk és la proporció d'afroamericans.

Sabent que les mitjanes, desviacions típiques i correlacions són:

- $\bar{X}_1 = 408.24$ $\sigma_1 = 168.54$ $r_{12} = 0.91$
- $\bar{X}_2 = 9.55$ $\sigma_2 = 8.71$ $r_{13} = -0.44$
- $\bar{X}_3 = 356.67$ $\sigma_3 = 91.30$ $r_{23} = -0.44$

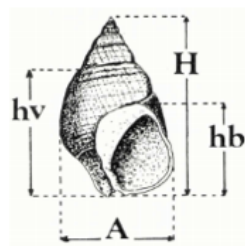
es demana:

- Trobis els tres plànols de regressió i el coeficient de correlació múltiple de X_3 sobre X_1, X_2 .
- Disminueix la proporció de persones afroamericanes X_3 on el preu de l'habitatge és més alt X_1 i millor són els accessos a les autopistes X_2 ?
- L'error típic comés a l'estimació anterior.

Enunciat 24.2

En un jaciment pliocènic de l'Empordà (Catalunya) s'han trobat 10 gasteròpodes del gènere *Buccinacea*. Se n'ha mesurat l'alçada (H), l'alçada de l'última volta de l'espiral del cargol (hv), l'alçada de la boca, (hb) i l'amplada (A), obtenint-se els següents resultats (en cm):

	H	hv	hb	A
1	2.631	2.089	1.702	1.799
2	2.240	1.810	1.454	1.542
3	2.247	1.671	1.284	1.432
4	-	2.167	1.585	1.718
5	2.714	2.129	1.629	1.805
6	3.311	2.610	2.005	2.097
7	2.341	1.870	1.402	1.520
8	2.228	1.715	1.332	1.507
9	2.312	1.796	1.339	1.425
10	2.117	1.595	1.315	1.369
11	2.557	1.980	1.495	1.628



Es desconeix l'alçada H de l'exemplar 4. Estimis H per regressió múltiple sobre les altres mesures i calculis l'error típic.

Enunciat 24.3

En una investigació sobre el desenvolupament d'una espècie arbòria, es correlacionen el perímetre del tronc (T), l'edat (E) i l'alçada (A). S'obtenen les correlacions següents entre els tres factors:

	T	E	A
T	1	0.785	0.912
E		1	0.769
A			1

Té alguna relació l'edat amb el perímetre del tronc i l'alçada? Cóm es pot eliminar aquesta relació per tal d'obtenir la correlació entre T i A ?

Enunciat 24.4

Es desitja conèixer les despeses mensuals d'alimentació d'una família en funció de l'ingrés mensual, la mida de la família i el nombre de fills a la universitat. Les dades es mostren a la següent taula:

Família	Despeses	Ingressos	Mida	Universitat
1	1000	5000	7	3
2	580	2500	4	1
3	520	2000	3	1
4	500	1900	3	0
5	600	3000	6	1
6	550	4000	5	2
7	400	2000	2	0

Enunciat 24.5

David i Riley [*] varen examinar els factors cognitius mesurats amb la prova de nivell d'Allen (*Allen's Cognitive Levels* – ACL -) i la relació de la prova amb el nivell de psicopatologia.

Els individus estudiats eren pacients de la unitat de psiquiatria de l'Hospital General. A més de l'ACL, varen recollir [dades de qualificacions del test de símbols i dígit](#) (*Symbol Digit Modalities Test* - *SDMT*), el vocabulari (V) i l'abstracció (A) .

[*] David, S K, and W T Riley. "The Relationship of the Allen Cognitive Level Test to Cognitive Abilities and Psychopathology". The American journal of occupational therapy 44.6 (1990): 493–497. Web.

25. Contrast d'hipòtesis de regressió

Enunciat 25.1

En un estudi [*] es mesura la longitud de l'ala anterior dreta (V1) i l'amplada de la quarta placa ventral (V11) de 110 abelles. S'estudien 116 ruscs, de 24 apiaris, dividits en 10 zones d'estudi als municipis d'Ibagué, Rovira, Anzoategui i Líban, del departament de Tolima (Perú). S'obté una correlació mostral de $r = 0.247$. És significativa aquesta correlació amb un nivell de significació $\alpha = 0.01$? (es suposa normalitat bivariada)

[*] Guillermo Salamanca Grosso, Fernando Londoño Morales, Fredy Arvey Rivera Páez, Manuel Oswaldo Zapata Ochoa; "[Análisis morfométrico de la abeja *Apis mellifera* en algunas zonas apícolas departamento del Tolima](#)", Departamento de Química Universidad del Tolima.

Enunciat 25.2

Dues variables aleatòries X i Y són normals i independents, amb r la correlació mostral d'una mostra de mida $n = 100$. Quina és la probabilitat de $|r| > 0.5$?

Enunciat 25.3

En una investigació, es mesura la longitud i l'amplada de 20 fulles de *Quercus aliena*, amb els resultats següents:

Longitud = 13.9, 21.4, 21.5, 12.3, 23.8, 14.1, 17.8, 10.8, 9.1, 14.5, 12.9, 17.9, 14.1, 20.1, 14.1, 22.1, 10.9, 10.8, 13.1, 11.1.

Amplada = 6.4, 9.3, 9.6, 5.8, 9.1, 6.9, 7.1, 4.1, 4.8, 6.9, 5.1, 7.3, 6.8, 8.9, 6.7, 9.9, 4.1, 4.3, 5.9, 5.9.

Suposant normalitat en dues variables, es demana:

- Són independents l'amplada i la longitud de les fulles en la població ? (amb $\alpha = 0.01$).
- Es pot admetre que la correlació poblacional és $\rho = 0.95$?

Enunciat 25.4

A 20 parcel·les de la mateixa extensió i dins la mateixa plantació, s'han sembrat plantes de l'espècie *Cucumis melo* i se n'han mesurat les variables aleatòries següents:

- $X = \{ \text{Milers de plantes sembrades} \}$
- $Y = \{ \text{Tm de meló produïdes per cada Ha sembrada} \}$

Sent:

- $X = \{ 31.684, 30.815, 32.320, 30.965, 28.527, 31.526, 32.025, 29.040, 30.457, 31.747, 31.886, 30.945, 30.934, 31.908, 29.456, 30.883, 30.018, 32.473, 30.720, 31.299 \}$
- $Y = \{ 51.68, 51.10, 52.74, 51.36, 49.58, 52.46, 52.72, 49.63, 50.88, 51.56, 51.88, 51.58, 52.00, 51.95, 49.40, 51.63, 50.69, 52.07, 51.10, 51.99 \}$

Es demana:

- a. Respecte la plantació, es pot acceptar que augmentant 1000 plantes a cada parcel·la, l'augment esperat de producció de melons serà de 2 Tm/Ha? (amb $\alpha = 0.01$)?
- b. Si en una parcel·la es planten 30018 plantes, trobis un interval de confiança al 95 % , de la producció de melons que cal esperar-hi.

Enunciat 25.5

Es desitja correlacionar una sèrie de variables d'una mostra de 1000 individus de la mateixa edat i població, de manera que només es volen analitzar aquelles que siguin significatives al nivell $\alpha = 0.01$. A partir de quin valor, en valor absolut, s'haurà de considerar que una correlació és significativa ?

26. Problemes detallats amb R

Enunciat 26.1

Amb l'objectiu de fer un estudi de mercat sobre el preu dels pisos, es seleccionen de forma aleatòria una mostra estratificada representativa dels diferents barris d'una ciutat. Les dades sobre el preu dels pisos en milers d'euros, la superfície en m² i l'antiguitat de l'immoble en anys, es mostren a continuació:

preu = 250, 130, 165, 310, 320, 400, 200, 80, 69, 179, 120, 223, 300, 198, 165, 69, 73, 123, 356, 183.

superfície = 120, 80, 100, 180, 190, 250, 99, 90, 60, 100, 110, 120, 180, 130, 90, 50, 60, 70, 120, 130.

antiguitat = 15, 20, 30, 15, 12, 40, 30, 27, 14, 20, 22, 25, 21, 33, 5, 12, 6, 10, 28, 30.

Efectueu un estudi detallat de les dades recollides.

Enunciat 26.2

En una cadena de muntatge es vol determinar la correlació entre les variables:

- $X = \{ \text{Nombre de peces fabricades} \} = \{ 10, 15, 10, 20, 25, 18, 12, 14, 16, 22, 24, 17, 13, 30, 24 \}$
- $Y = \{ \text{Quantitat de recursos utilitzats} \} = \{ 24, 27, 29, 31, 25, 33, 26, 28, 31, 39, 33, 30, 25, 42, 40 \}$

Efectueu un estudi detallat.

Enunciat 26.3

La taula mostra informació sobre l'edat i la pressió sanguínia de 10 dones:

edat	56	42	72	36	63	47	55	47	38	42
pressió	148	126	159	118	149	130	151	142	114	141

Es pot extrapolar l'edat a partir de la pressió sanguínia?

Enunciat 26.4

Es disposa de dades de 16 participants (8 homes i 8 dones). Tots assisteixen a un club nocturn i, sense prendre gens ni mica d'alcohol, seleccionen una parella. Un investigador fa una fotografia a la parella escollida pel participant i un grup de jutges independents avalua, de 0 a 100, l'atractiu físic de la parella escollida. Els resultats es recullen a la taula següent:

sexe: {dona, dona, dona, dona, dona, dona, dona, dona, home, home, home, home, home, home, home, home}

atractiu: {65, 70, 60, 60, 60, 55, 60, 55, 50, 55, 80, 65, 70, 75, 75, 65}

Concretament, es vol determinar si hi ha diferències entre homes i dones a l'hora d'escollir parella per l'aspecte físic i quin dels dos sexes és més selectiu.

27. Anàlisi de la variància (ANOVA)

Enunciat 27.1

Una certa planta ha estat cultivada amb cinc fertilitzants diferents. Es desitja estudiar l'efecte del tipus de fertilitzant en la longitud de la planta en cm. Per a fer-ho es varen mesurar cinc sèries de 10 plantes, obtenint-se els següents resultats:

fertilitzant 1	10, 12, 8, 10, 6, 13, 9, 10, 8, 9
fertilitzant 2	11, 18, 12, 15, 13, 8, 15, 16, 9, 13
fertilitzant 3	7, 14, 10, 11, 9, 10, 9, 11, 7, 9
fertilitzant 4	12, 9, 11, 10, 7, 8, 13, 14, 10, 11
fertilitzant 5	7, 6, 10, 7, 7, 5, 6, 7, 9, 6

Enunciat 27.2

La taula següent ens mostra les estimacions d'un índex del cost de la vida a cinc zones urbanes d'una mateixa ciutat, fetes per cinc investigadors diferents:

Investigador	Zona				
	1	2	3	4	5
1	270	263	264	263	260
2	280	265	274	274	279
3	275	284	278	271	296
4	271	269	272	297	274
5	279	267	269	263	284

Es vol saber si hi ha diferències significatives entre les zones i entre els investigadors. (prenguis $\alpha = 0.05$)

Enunciat 27.3

Es planten quatre varietats de patates, cadascuna en cinc parcel·les de la mateixa mida i tipus de terra, però tractades amb un fertilitzant diferent. El rendiment en Tm es recull a la taula següent:

Varietat	Fertilitzant				
	1	2	3	4	5
1	1.9	2.2	2.6	1.8	2.1
2	2.5	1.9	2.3	2.6	2.2
3	1.7	1.9	2.2	2.0	2.1
4	2.1	1.8	2.5	2.3	2.4

Es vol saber si hi ha diferències significatives entre el rendiment de les quatre varietats de patata i si el fertilitzant n'ha tingut algun efecte, independentment de la varietat de patata. (prenguis $\alpha = 0.05$)

Enunciat 27.4

Es volen comparar tres genotips diferents de *Drosophila melanogaster* per tal de veure si hi ha diferències de viabilitat, sembrant 100 i 800 ous. Així, a cadascuna de sis caselles (3 genotips x 2 sembrats d'ous) es varen disposar sis rèpliques, obtenint-se els següents percentatges d'ous viables:

Nombre d'ous sembrats								
100			200					
Genotip			Genotip					
1	2	3	1	2	3			
93.0	95.5	92.0	83.3	84.0	85.3			
94.0	83.5	91.0	87.6	84.4	89.4			
93.0	92.0	90.0	81.9	77.0	85.4			
90.0	92.5	95.0	80.1	67.0	87.4			
93.0	82.0	84.0	79.6	69.1	52.0			
86.0	82.5	78.0	49.4	88.4	77.0			

Amb l'ajut d'un ordinador, es transformen els percentatges observats, per tal de que s'ajustin a una variable aleatòria normal, i s'obté la taula d'anàlisi de la variància. Concretament, es vol determinar si hi ha diferències de viabilitat entre els genotips, entre el nombre d'ous sembrats i amb la interacció entre el nombre d'ous sembrats i el genotip. (prenguis $\alpha = 0.01$).

Enunciat 27.5

Es disposa de quatre mostres, em mg, del pes de l'escut dorsal de larves de l'insecte paràsit *Haemaphysalis leporispalustris*:

mostra 1:	380, 370, 360, 368, 372, 366, 374, 382
mostra 2:	350, 356, 358, 376, 338, 342, 366, 350, 344, 364
mostra 3:	354, 360, 362, 352, 366, 372, 362, 344, 342, 358, 351, 348, 348
mostra 4:	376, 344, 342, 372, 374, 360

Són significatives les diferències entre les quatre mostres? (consideris $\alpha = 0.05$)

Enunciat 27.6

Es recullen nou mostres de calcopirita, a tres localitats i a tres profunditats diferents. El percentatge aproximat de coure analitzat es mostra a la taula següent:

Profunditat	Localitat		
	1	2	3
1	27	28	24
2	33	38	40
3	40	48	37

Es vol saber si hi ha diferències significatives entre el percentatge de coure, tant a les diferents profunditats com a les diferents localitats (prenguis $\alpha = 0.05$).

Enunciat 27.7

Es desitja comparar quatre varietats de blat. Després de plantar les quatre varietats a quaranta parcel·les idèntiques, a 10 parcel·les per varietat, s'ha calculat la següent taula de l'anàlisi de la variància per a la variable "pes de blat":

Font de variació	Suma de quadrats	Graus de llibertat	Quadrats mitjans
Entre grups	22.7	3	7.57
Dins dels grups	187.2	6	5.2
Total	209.9	39	

Poden considerar-se varietats diferents de blat? (consideris $\alpha = 0.05$)

Enunciat 27.8

Es pretén valorar l'eficàcia de quatre models de màquina en la producció d'una determinada peça mecànica. Per a fer-ho es fa treballar als mateixos vint obrers en cadascuna de les quatre màquines per un mateix període de temps. La producció de peces es recull a la taula següent:

Obrer	Màquina				Obrer	Màquina			
	1	2	3	4		1	2	3	4
1	46	46	47	48	11	45	50	39	49
2	38	42	42	47	12	51	42	51	55
3	42	44	42	44	13	47	47	45	48
4	37	39	51	45	14	52	51	49	48
5	48	49	54	51	15	50	45	45	44
6	40	38	40	44	16	48	47	49	48
7	43	47	49	47	17	47	50	49	54
8	43	45	46	48	18	47	47	44	54
9	42	47	45	47	19	57	44	45	44
10	49	55	47	57	20	45	41	51	48

Són significatives les diferències entre màquines ? Es pot acceptar que les diferències entre els obrers son degudes a l'atzar ? (prenguis $\alpha = 0.05$)

Enunciat 27.9

La taula següent ens mostra els valors de la glucèmia, en mg glucosa/dL sang, de quatre grups d'individus independents, obtingudes amb un mostreig aleatoritzat de les poblacions originals. Es vol saber si hi ha diferències significatives entre els quatre grups, amb $\alpha = 0.05$.

Grup			
1	2	3	4
112	116	134	104
124	123	146	112
132	108	137	105
115	102	126	110
116	135	122	124
131	165	127	109
122	104	114	102
115	96	102	96
96	132	136	154
135	111	142	111

Enunciat 27.10

La duració en hores de cinc sèries de bombetes elèctriques va ser la següent:

serie1	1600	1620	1650	1700	1730	1800
serie2	1470	1450	1540	1480	1500	
serie3	1460	1480	1510	1530	1470	
serie4	1530	1570	1600	1590		
serie5	1510	1520	1580	1610	1630	

Poden considerar-se sèries de diferent duració? (consideris $\alpha = 0.01$)

28. Proves no paramètriques

Enunciat 28.1

Un psicòleg vol comprovar si l'assistència al jardí d'infants dels nens té alguna influència sobre la capacitat de percepció social d'aquests. Qualifica la percepció segons l'avaluació de les respostes a dibuixos que representen diverses situacions socials, obtenint per a cadascun d'ells una qualificació dins l'escala de 0 a 100. En el test efectuat a dos germans bessons univitel·lins, un dels quals va al jardí d'infància i l'altre no, obté els resultats següents:

assisteix al jardí d'infància	no assisteix al jardí d'infància
82	63
69	42
73	64
43	37
58	51
56	43
76	80
65	82

Es pot afirmar que hi ha diferències significatives entre els resultats i que anar al jardí d'infància millora la percepció social del nen amb un 95% de significació?

Enunciat 28.2

Es vol determinar si les alçades d'un determinat grup d'homes són significativament diferents de les d'un grup de dones. Per a fer-ho es seleccionen aleatòriament 7 homes i cinc dones, amb alçades:

homes	185	180	170	178	193	183	188
dones	168	173	163	165	175		

29. Regressió logística

Enunciat 29.1

En un estudi es pretén demostrar l'efecte de l'exposició al crom amb la prevalença d'un tipus de càncer de pulmó. Es seleccionen 95 casos, de similars característiques, i s'obtenen els següents resultats:

		exposició		
		no	sí	
malaltia	no	74	12	86
	sí	5	4	9
		79	16	95

Enunciat 29.2

Uns grups de treballadors (tots homes), han estat exposats a diverses dosi d'un compost químic. Les dades es mostren a la taula següent:

dosis	numexpos	numintoxi
1	20	2
2	30	6
3	30	9
4	25	10
5	20	12